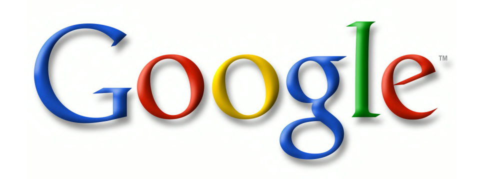
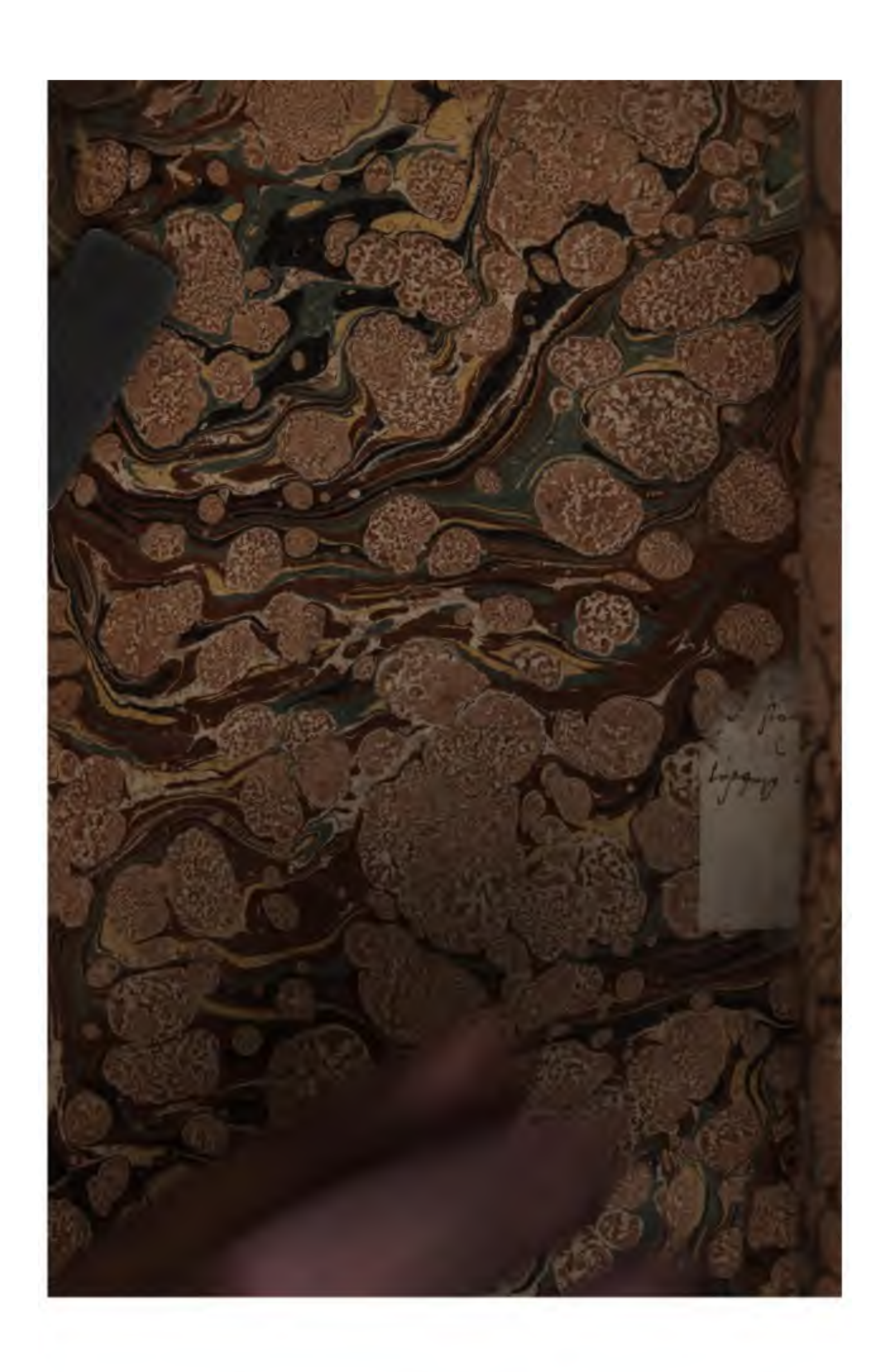



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06636596 0




S,
E.
es et

3 -UEF

COURS
DE
MATHÉMATIQUES,

PAR

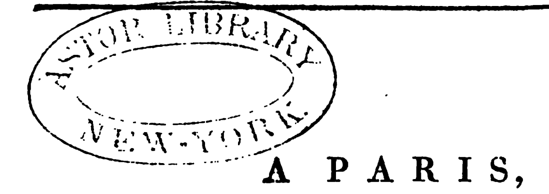
CHARLES BOSSUT,

MEMBRE DE L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES ET DES ARTS, etc.

TOME PREMIER.

ARITHMÉTIQUE et ALGEBRE.

NOUVELLE ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE.



A PARIS,

RUE DE THIONVILLE, n.° 116,

Chez FIRMIN DIDOT, libraire pour les mathématiques et l'architecture.

AN VIII — 1800.

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

On ne trouve aucun peuple civilisé et un peu nombreux, soit parmi les anciens, soit parmi les modernes, qui n'ait cultivé plus ou moins les mathématiques; mais tous n'y ont pas fait des progrès égaux. Cette différence doit être attribuée à celle des climats, des gouvernements, et quelquefois à des circonstances particulières qui impriment à une nation un mouvement général vers certains objets. Je puis citer en preuve des exemples remarquables. Les Grecs, nés sous le ciel le plus heureux, et longtemps possesseurs d'une liberté réglée par les institutions les plus sages, ont mené de front les lettres, les arts, les sciences; et partout ils ont excellé. Les Romains, uniquement occupés de leurs conquêtes durant plusieurs siècles, eurent enfin des orateurs, des historiens et des poètes, qui se formèrent au sein de leurs divisions intestines : bientôt le talent de la parole devint un moyen presque aussi assuré que les qualités guerrières, pour arriver aux premières places de la république; mais ce peuple montra peu de goût et de génie pour les arts et les sciences, qui ne conduisoient pas aux mêmes honneurs. De temps immémorial les Chinois s'adonnent aux mathématiques; la plupart de leurs empereurs les ont aimées et les ont encouragées par des bienfaits; le pays qu'ils habitent est en particulier très-favorable aux observations astronomiques : cependant, malgré le concours de tant de circonstances avantageuses, les sciences demeurent toujours parmi eux dans un état de médiocrité et de langueur. Leur astronomie est à peu près ce qu'étoit la nôtre il y a deux cents ans. C'est dans la morale qu'ils se sont le plus distingués. Attachée superstitieusement à ses anciens usages, la nation chinoise paroît dépourvue de cette activité inquiète qui cherche la nouveauté et qui produit les découvertes.

Il y a à peu près les mêmes différences d'individu à individu que de peuple à peuple. Chaque homme a son

genre particulier d'esprit, qui ne se porte pas indifféremment vers tous les sujets. Une intelligence ordinaire suffit pour comprendre les éléments des mathématiques, et même pour en faire des applications utiles: mais veut-on s'élever à la géométrie des courbes, à la mécanique transcendante, à la théorie du mouvement des fluides? alors la progression des principes et des raisonnements se complique à chaque pas : pour la suivre et la pousser plus loin, il faut une force de tête et une sagacité que peu d'hommes ont en partage. Vous êtes destiné à devenir grand orateur, grand poète, si à une imagination brillante et féconde, vous joignez un goût sévère et dirigé par l'étude des excellents modèles : les caractères du génie mathématique sont la justesse, la clarté et la profondeur. Je n'ai point la capacité ni le dessein d'assigner ici les places aux productions du génie : je n'entreprendrai pas même de combattre à cet égard les jugements précipités de l'envie ou de la prévention ; mais je crois, en général, que dans tous les genres les hommes supérieurs sont à peu près également rares. La nature met, pour ainsi dire, une espèce d'équilibre entre ses ouvrages. Si la vanité pouvoit s'oublier un moment elle-même, et si elle vouloit considérer que le succès complet dans une partie ne s'obtient que par un travail opiniâtre et suivi, qui nous condamne ordinairement à l'ignorance ou à la médiocrité dans toutes les autres, on deviendroit plus réservé, plus équitable ; et, lorsqu'on ne seroit pas en état d'apprécier un talent, on s'abstiendroit au moins d'en parler avec un dédain magistral, dont l'effet le plus certain est d'exciter le mépris pour le détracteur.

Les deux traités qui composent ce volume comprennent l'arithmétique et l'algèbre : jetons un coup-d'œil général sur l'origine et les progrès de ces deux sciences.

Origine et progrès de l'arithmétique.

L'arithmétique, qui est la clef de toutes les parties des mathématiques, porte sur des notions primordiales d'une extrême simplicité. En effet, rien n'est plus clair et plus facile à concevoir que l'idée de *nombre* ou de *multitude*. Aux premiers rayons d'intelligence que l'homme sentit, il put compter ses doigts, les arbres qui l'environnoient, et les autres objets placés sous ses yeux. Tous ces calculs, s'il est permis de les appeler ainsi, se firent d'abord sans méthode et sans autre secours que celui de la mémoire. Bientôt on trouva les moyens de les étendre et de les soumettre à des règles. Un de ces premiers moyens étoit de représenter les objets à nombrer, par de petites boules enfilées comme les grains d'un chapelet. Chaque boule désignoit, par exemple, une brebis; et la collection des boules, tout le troupeau.

L'invention de l'écriture fit faire un nouveau pas à l'art de la numération. Sur une table couverte de poussière, on traçoit des caractères choisis arbitrairement pour exprimer les nombres; et par là on pouvoit exécuter des opérations arithmétiques d'une certaine longueur.

Toutes les nations, si on en excepte les anciens Chinois et une peuplade obscure dont Aristote fait mention, ont distribué les nombres en périodes composées chacune de dix unités. Cet usage ne peut guère s'attribuer qu'à celui où l'on est naturellement dans l'enfance de compter par ses doigts, qui sont au nombre de dix. Les anciens se sont également accordés à représenter les nombres par les lettres de leur alphabet. On distinguoit les différents périodes de dixaines par des accents dont on affectoit les lettres numérales, comme chez les Grecs; ou par différentes combinaisons des lettres numérales,

comme chez les Romains. Toutes ces notations, et principalement celle des Romains, étoient fort composées et fort incommodes quand il s'agissoit d'exprimer des nombres un peu considérables.

Strabon raconte, dans sa *Géographie*, qu'on attribuoit de son temps l'invention de l'arithmétique, comme celle de l'écriture, aux Phéniciens (1). Cette opinion a pu en effet trouver d'autant plus de facilité à s'établir, que les Phéniciens, ayant été les plus anciens commerçants de la terre, ont dû naturellement perfectionner une science dont ils faisoient un usage continuel; mais les principes de l'arithmétique étoient connus des Egyptiens et des Chaldéens, longtemps avant qu'il fût question des Phéniciens, qui vraisemblablement les avoient appris des Egyptiens leurs voisins.

La science des mages ou prêtres égyptiens a été renommée dans l'antiquité. Ils étoient, pour ainsi dire, les dépositaires de toutes les connoissances que les hommes avoient acquises depuis l'origine du monde. On venoit de tous côtés s'instruire parmi eux. Plusieurs illustres philosophes grecs, entre autres Thalès de Milet et Pythagore de Samos, firent le voyage de l'Egypte dans cette vue.

On ne connoît aucune découverte de Thalès dans l'arithmétique : il est célèbre principalement comme géomètre et astronome (2).

Pythagore embrassoit toutes les sciences (3), et en particulier il avoit porté très-loin les combinaisons des nombres. Les emblêmes dont il enveloppoit sa philosophie lui ont fait attribuer des systêmes extraordinaires, qu'on a de la peine à regarder comme les productions d'un aussi grand génie. Il ne tient pas à quelques écrivains, qu'on ne le mette à la tête des inventeurs de l'an-

(1) 840 ans av. J. C. (2) 600 ans av. J. C. (3) 590 ans av. J. C.

cienne cabale. A les en croire, Pythagore attachoit plusieurs vertus mystérieuses à certains nombres : il ne juroit que par le nombre *quatre*, qu'il appeloit le nombre par excellence, le nombre des nombres, et le symbole de la divinité; il trouvoit aussi dans le nombre *trois* plusieurs propriétés merveilleuses; il disoit qu'un homme parfaitement instruit dans l'arithmétique posséderoit le souverain bonheur, etc. Mais quand on lui auroit entendu avancer de telles propositions, faudroit-il les prendre strictement dans le sens littéral? N'est-il pas plus vraisemblable, ou qu'on a mal rapporté ses paroles, ou qu'elles renfermoient des allégories dont le vrai sens est demeuré inconnu? Cette conjecture paroît d'autant mieux fondée que, selon d'autres auteurs, Pythagore n'ayant jamais rien écrit sur les différents objets de la philosophie, sa doctrine se conserva pendant longtemps seulement dans sa famille et parmi ses disciples, mais que dans la suite Platon et d'autres philosophes, d'après une tradition vague et confuse, la développèrent et la corrompirent. Je n'insisterai pas sur cette ténébreuse question, qui ne présente d'ailleurs maintenant aucun objet d'intérêt. De toutes les découvertes vraies ou prétendues de Pythagore sur les nombres, le temps n'a respecté que sa table de multiplication.

Il paroît que jusqu'au siècle de Diophante (1), l'arithmétique des anciens ne comprenoit que les quatre règles ordinaires, et l'extraction des racines quarrée et cube. Mais ce mathématicien, l'un des plus illustres que l'école d'Alexandrie ait produits, inventa une nouvelle classe de problêmes arithmétiques, qui non-seulement enrichirent alors la science des nombres, mais qui ont préparé de loin la découverte de l'algèbre.

Le moyen le plus simple de donner ici une idée gé-

(1) On conjecture que Diophante fleurissoit vers l'an 350 de J.C.

nérale de ces problêmes, qui méritent fort d'être connus, est de rapporter les énoncés de quelques-uns; je les prends au hasard : *Partager un nombre donné en deux autres dont la différence soit donnée ; Trouver deux nombres dont la raison arithmétique et la raison géométrique soient données ; Trouver deux nombres tels que leur somme ait un rapport donné à la somme de leurs quarrés ; Partager un quarré donné en deux autres quarrés ; Trouver trois nombres, tels qu'en retranchant le quarré de chacun d'eux de leur somme totale, chaque reste soit un quarré ; Partager un nombre donné en deux cubes dont la somme des racines soit donnée ; Trouver trois nombres en progression géométrique, tels que, retranchant de chacun d'eux un nombre donné, le reste soit un quarré.* Si on applique à ces problêmes les méthodes algébriques qui sont aujourd'hui en notre pouvoir, on verra que les uns mènent à des équations déterminées, les autres à des équations indéterminées. Ceux de la première espèce n'ont aucune difficulté qui leur soit propre; ceux de la seconde, quand on veut les résoudre en nombres rationnels, demandent plusieurs artifices particuliers de calcul. Diophante montre la plus grande sagacité dans toutes ces recherches : ses moyens ont de la ressemblance avec ceux que l'algèbre nous fournit pour la résolution des équations des deux premiers degrés. Cette conformité l'a fait regarder comme le premier inventeur de l'algèbre. Il avoit écrit treize livres d'arithmétique sur ces matières; nous n'avons que le six premiers.

Diophante a eu une foule de savants interprètes. De ce nombre fut d'abord la célèbre Hypatia (1), malheureuse victime du fanatisme monacal. Son père, le philosophe Théon, avoit pris un tel soin de l'instruire, qu'elle

(1) An de J. C. 410.

fut choisie, très-jeune encore, pour enseigner les mathématiques dans l'école d'Alexandrie. Tous les historiens s'accordent à dire qu'aux graces de la figure, Hypatia joignoit une rare modestie, des mœurs pures, et une prudence consommée. Ces avantages lui donnèrent une grande considération à Alexandrie, et surtout auprès d'Oreste, gouverneur de cette ville. De misérables disputes théologiques ayant fait naître une cruelle dissension entre Oreste et *saint* Cyrille, les moines de la faction de *saint* Cyrille excitèrent le peuple à massacrer Hypatia, en la peignant comme l'auteur des troubles, par les conseils qu'elle donnoit au gouverneur. *Cette action,* dit l'historien Socrate, *attira un grand reproche à Cyrille et à l'église d'Alexandrie ; car ces violences sont tout-à-fait éloignées du christianisme* (1).

Il seroit trop long de citer tous les commentateurs de Diophante : je me contenterai d'ajouter que, parmi les modernes, Bachet de Méziriac, Fermat, Frénicle de Bessy, Prestet, Billy, Maclaurin, Euler, etc., ont cultivé et perfectionné cette partie de l'analyse. Elle méritoit en effet cet honneur, non-seulement parce qu'elle est curieuse en elle-même, mais encore parce qu'elle est utile dans l'algèbre et dans le calcul intégral, pour transformer dans plusieurs cas des quantités radicales en d'autres purement rationnelles.

Les mathématiques fleurissoient toujours en Grèce, et principalement dans l'école d'Alexandrie, lorsqu'un peu avant le milieu du VII.ᵉ siècle (2) il s'éleva contre elles une affreuse tempête qui les menaçoit d'une ruine totale dans ces climats. Pleins de l'enthousiasme que leur inspiroit une religion guerrière, les successeurs de

(1) Fleury, hist. eccl. tome V, in-12, page 414.
(2) An de J. C. 638.

Mahomet ravagèrent la vaste étendue de pays compris depuis le fond de l'Orient jusques à la partie méridionale de l'Europe. Les artistes et les savants, rassemblés de toutes parts au musée d'Alexandrie, furent chassés honteusement. Quelques-uns devinrent les victimes de la violence des conquérants; les autres allèrent traîner dans les pays éloignés les restes d'une vie languissante. On détruisit les lieux et les instruments qui avoient servi à faire une immense quantité d'observations astronomiques. Enfin ce précieux dépôt des connoissances humaines, la bibliothèque des rois d'Egypte, qui avoit déja souffert un incendie sous Jules César, fut entièrement livrée aux flammes par les Arabes : le calife Omar ordonna qu'on brûlât tous ces livres, *parce que,* disoit-il, *s'ils sont conformes à l'alcoran, ils sont inutiles; et s'ils y sont contraires, ils doivent être abhorrés et anéantis.* Raisonnement bien digne d'un brigand fanatique !

Il sembloit que le sort des sciences, attaquées et détruites dans le centre de leur empire, étoit absolument désespéré. Mais cette même vicissitude qui produit tant de malheurs et tant de crimes, amène aussi quelquefois des révolutions avantageuses au genre humain. Tel fut le changement qui se fit bientôt dans les mœurs des Arabes. Ces peuples, comme tous ceux de l'Orient, avoient eu autrefois quelques notions des sciences, et principalement de l'astronomie. Si le fanatisme d'une religion sanguinaire étouffa d'abord ces germes précieux, il n'en dessécha pas entièrement les racines. Lorsque ces différentes nations furent lasses de s'exterminer mutuellement, leur férocité s'adoucit, et le loisir de la paix rappela l'esprit actif des Arabes à des objets plus réels et plus agréables que les disputes sur les dogmes de l'alcoran. A peine s'étoit-il écoulé un siècle et demi depuis la mort de Mahomet, qu'ils commencèrent à

cultiver eux-mêmes les arts et les sciences qu'ils avoient voulu proscrire. Ils eurent bientôt des poëtes, des orateurs, des mathématiciens, etc. On compte dans ce nombre plusieurs califes chez les Arabes, et ensuite plusieurs empereurs chez les Persans, quand ce dernier peuple se fut séparé du premier.

On doit aux Arabes la découverte à jamais mémorable de notre numération arithmétique. J'ai déja remarqué que les anciens peuples faisoient servir les lettres de leur alphabet à représenter les nombres, et que cette notation avoit des inconvénients. Les Arabes inventèrent des caractères particuliers, appelés *chiffres*, pour exprimer les nombres, et ils établirent la convention qu'un même chiffre représenteroit des unités, des dixaines, des centaines, etc., selon la place qu'on lui feroit occuper. Ce systême ingénieux a tous les avantages qu'on pouvoit desirer : il réunit la clarté à la précision : un nombre immense par la multitude de ses unités, se peint aux yeux et à l'esprit dans un très-petit espace. On prétend que les Arabes tenoient cette idée des Indiens. C'est un point de critique que je n'entreprendrai pas de discuter. Quelque opinion qu'on adopte, il est certain que les Arabes sont ici nos bienfaiteurs immédiats. Le célèbre Gerbert, qui fut dans la suite pape sous le nom de Sylvestre II, alla puiser l'arithmétique en Espagne, où les Arabes dominoient alors; et il la répandit dans le reste de l'Europe vers l'an 960. Quant à la figure particulière des chiffres, elle a subi quelques changements : celle que nous employons aujourd'hui ne s'est introduite d'une manière invariable que sur la fin du XII.ᵉ siècle.

Nous trouvons chez les Grecs modernes quelques étincelles du génie qui avoit animé Archimède, Apollonius, Diophante, etc. Ils inventèrent les quarrés magiques vers le milieu du XV.ᵉ siècle, et c'est à Mosco-

pule qu'on en attribue les premières notions. Cette épithète de *magique* est donnée à un quarré divisé en cellules égales et quarrées, dans lesquelles on inscrit les termes d'une progression arithmétique, de telle sorte qu'en les ajoutant ensemble suivant les bandes verticales ou horizontales, et suivant les diagonales du quarré, on ait constamment la même somme. On s'est exercé pendant longtemps à ces problêmes, et on les a variés de plusieurs manières. Mais, comme ils forment une classe absolument isolée et inutile dans l'usage, ils ont perdu l'attrait que la nouveauté, jointe au mérite de la difficulté vaincue, avoit pu leur donner.

En 1614, le baron de Neper, écossois, fit l'importante découverte des logarithmes, qui mettent dans les calculs numériques des abréviations auxquelles l'astronomie doit en partie ses progrès. Il arriva à cette découverte en considérant la correspondance qui règne entre la progression arithmétique et la progression géométrique : il forma le projet de construire sur ce principe des tables qui devoient réduire les multiplications et les divisions à de simples additions ou soustractions ; et il avoit déja commencé à les calculer, lorsqu'il fut enlevé par la mort. Henri Brigge et Adrien Vlacq reprirent ce travail sous une forme un peu différente ; et ils publièrent enfin les tables de logarithmes qu'on emploie aujourd'hui. Plusieurs auteurs les ont fait réimprimer avec des additions et des changements qui ne touchent point au fond du systême, et qui tendent seulement à faciliter les usages auxquels elles sont destinées.

Le siècle passé vit naître encore plusieurs théories qui concernent les propriétés des nombres. Le lord Brounker inventa les fractions continues, qui lui servirent à trouver le rapport très-approché de la circonférence du cercle au diamètre. Huguens employa le même moyen dans le calcul d'une machine destinée à

représenter les mouvements de notre systême planétaire. Mercator et Wallis imaginèrent plusieurs suites de nombres d'une espèce nouvelle. Toutes ces recherches et d'autres semblables ont pris leur origine dans la considération des nombres; mais la plupart doivent leur accroissement à l'algèbre.

Origine et progrès de l'algèbre.

Quelque systême d'arithmétique qu'on adopte, lorsque la notation des nombres est une fois fixée, les mêmes caractères écrits de la même manière expriment toujours un même nombre. D'où l'on voit que si, après avoir résolu une question numérique, il s'agit d'en résoudre une autre toute pareille, et différente seulement par l'énoncé des termes, il faut commencer une nouvelle opération. Les nombres qui remplissent les conditions du premier problême ont les propriétés individuelles qui dérivent de sa nature, et ils ne peuvent pas être appliqués au second. Mais si les résultats sont différents, les procédés du calcul sont d'ailleurs les mêmes dans les deux cas. De là naît une réflexion. Ne seroit-il pas possible de renfermer dans une même formule, ou dans une même expression générale, toute la suite des calculs que demandent les problêmes d'un même genre, de telle manière qu'on en pût tirer, par de simples traductions ou substitutions numériques, la solution de chaque problême particulier ? On a inventé cet art étonnant, et c'est l'objet de l'algèbre.

Cette science, qu'on appelle aussi quelquefois *analyse* ou *méthode de décomposition*, compare donc ensemble les grandeurs considérées dans l'état d'abstraction et de généralité; elle fait sur ces grandeurs les mêmes opérations que l'arithmétique fait sur les nombres. Elle va plus loin encore : elle enchaîne en quelque sorte les

quantités entre elles par des équations, sans distinguer les grandeurs qui sont connues et données immédiatement, d'avec celles qui sont inconnues. Par là elle procure l'avantage de trouver par de simples opérations de cacul, et sans que l'esprit soit fatigué, le rapport des quantités inconnues avec celles qui sont données. Quelques auteurs appellent l'algèbre *l'arithmétique universelle.* Les résultats de ses formules contiennent en effet des calculs numériques indiqués de la manière la plus simple et la plus abrégée dont ils puissent être susceptibles dans cet état de généralité.

Les premières notions de l'algèbre, qu'on trouve dans Diophante, furent développées par les Arabes; et dès lors cette science commença à prendre un corps distinct. Ils lui donnèrent le nom qu'elle porte : on ne connoît pas bien exactement l'étendue des progrès qu'ils y avoient faits; mais on croit qu'ils étoient parvenus jusqu'à résoudre quelques cas particuliers des équations du troisième et du quatrième degré.

Vossius raconte que, vers l'an 1400, un certain Léonard de Pise voyagea en Arabie, d'où il rapporta la connoissance de l'algèbre qu'il répandit en Italie. Il avoit même écrit sur cette science un ouvrage qui est perdu. Le premier traité d'algèbre qui ait paru en Europe est celui de Lucas de Burgo, sous ce titre : *Summa arithmetica et geometrica.* Il fut imprimé pour la première fois en 1494, et pour la seconde en 1523. La résolution des équations n'y est poussée que jusqu'au second degré. On prétend que Lucas de Burgo n'a pas été aussi loin que les Arabes et Léonard de Pise.

L'algèbre s'accrut rapidement en Europe, dans le XVIe siècle. Tartaglia, Scipio Ferrei, Cardan, tous Italiens, en s'exerçant sur divers problêmes du troisième degré, parvinrent à la résolution générale des équations qui s'y rapportent. Il paroît que Tartaglia eut la

plus grande part à l'invention. Cette théorie est expliquée dans l'ouvrage de Cardan, qui a pour titre : *De arte magna*, et publié en 1545. Les formules de cet auteur, les seules qu'on ait pu trouver jusqu'à présent pour représenter les racines d'une équation du troisième degré, renferment un cas qui est devenu la torture de tous les analystes, et qu'on appelle par cette raison *cas irréductible*. Dans les équations qu'il embrasse, l'expression des racines est composée de plusieurs parties dont les unes sont réelles, les autres imaginaires. Cardan n'osa rien prononcer sur la nature de ces racines. Raphaël Bombelli fit voir le premier dans son Algèbre, qui parut en 1595, qu'elles formoient un résultat réel. Cette proposition étoit d'abord un vrai paradoxe; mais le paradoxe disparut lorsqu'on vit, par la démonstration de Bombelli, que les parties imaginaires de la racine devoient se détruire mutuellement par l'opposition des signes, et qu'il ne resteroit de tout l'assemblage qu'une quantité réelle. Quelques efforts qu'on ait faits depuis ce temps-là pour obtenir directement la racine sous une forme débarrassée d'imaginaires, on n'a pas encore pu y parvenir. Mais du moins on la trouve d'une manière approchée et suffisamment exacte pour la pratique.

Les équations du quatrième degré furent résolues peu de temps après celles du troisième. Scipio Ferrei, et Louis Ferrari, disciple de Tartaglia, donnèrent pour cela, chacun de son côté, une méthode très-ingénieuse. Elle consiste à disposer les termes de l'équation de manière qu'en ajoutant à chaque membre une même quantité, les deux membres puissent se résoudre par la méthode du second degré. De là résulte, pour déterminer la quantité ajoutée, une équation de condition qui se rapporte au troisième degré. Ainsi la solution complète du quatrième degré est liée avec celle du troisième, et

la *difficulté du cas irréductible* est commune à l'une et à l'autre.

On essaya d'étendre les méthodes pour le troisième et le quatrième degré aux équations des degrés supérieurs ; mais cette tentative n'eut pas tout le succès qu'on espéroit ; elle ne réussit que pour des classes d'équations renfermées dans des limites assez étroites.

Viete (1), mathématicien français, contemporain de *Bombelli*, introduisit dans l'algèbre l'usage des lettres de l'alphabet, pour représenter toutes sortes de quantités connues ou inconnues ; et par là il donna aux formules algébriques une généralité qui est leur plus précieux avantage. C'étoit un défaut dans l'arithmétique d'exprimer les nombres par des lettres ; nous en avons *dit la raison*. Il en est tout autrement dans l'algèbre, parce qu'ici une lettre n'est pas employée à représenter une même grandeur individuelle et absolue ; elle représente une certaine quantité considérée en général ; et un même calcul résout toutes les questions d'une même classe. Avant notre auteur on ne considéroit que des *équations* numériques, et on représentoit l'inconnue seulement par une lettre ou par un caractère particulier. Il est vrai qu'ensuite la méthode appliquée à une équation, pouvoit être appliquée également à une autre équation semblable ; mais il étoit à desirer que toutes les équations particulières d'un même ordre ne fussent que des modifications d'une même formule générale. Ainsi la notation de Viete changea entièrement à cet égard la face de l'algèbre. Il n'en demeura pas là. Il *apprit à faire* sur les équations plusieurs opérations préliminaires qui facilitent les moyens de les résoudre ; par exemple, il enseigna à chasser le second terme d'une équation, à multiplier ou à diviser ses racines par des

---

(1) Viete né en 1540, mort en 1603.

nombres quelconques, etc. Il finit par donner une nouvelle méthode pour résoudre les équations du troisième et du quatrième degré.

Les Anglais firent, peu après Viete, des découvertes intéressantes dans l'algèbre. Harriot rassembla tout ce qui avoit été écrit sur cette science, et y ajouta plusieurs choses de son propre fonds. Il est le premier qui ait imaginé de mettre tous les termes d'une équation d'un même côté. Cette idée fut la source de quelques théorêmes très-remarquables et très-utiles. On vit par là que le coëfficient du second terme d'une équation est la somme de ses racines prises avec des signes contraires; que le coëfficient du troisième est le produit des racines prises deux à deux, etc., et qu'enfin le dernier terme est le produit de toutes les racines prises avec des signes contraires. On doit à ces théorêmes d'Harriot la résolution complète de plusieurs équations particulières.

Le plus grand promoteur de l'algèbre, vers le milieu du dernier siècle, est le fameux Descartes (1), génie vaste et hardi, qui fait époque dans l'histoire de l'esprit humain. On lui a reproché d'avoir sacrifié, dans un âge mûr où il devoit être détrompé des illusions, son repos et sa vie à la vaine curiosité d'une princesse, qui l'appela sous un ciel rigoureux pour s'instruire avec lui, et qui n'en devint ni plus savante ni meilleure. Mais la postérité a oublié la foiblesse que Descartes eut d'être courtisan, et ne voit plus en lui que le bienfaiteur de la philosophie. Il mérita en effet ce titre. Il brisa les autels que la superstition et l'ignorance avoient élevés à Aristote; il apprit aux hommes, dans sa *Méthode*, l'art de chercher la vérité; il joignit l'exemple au précepte dans sa *Géométrie* et dans sa *Dioptrique*. La gloire

(1) Né en 1595, mort en 1650.

qu'il a acquise comme mathématicien ne périra jamais, parce que les vérités qu'il a découvertes sont de tous les temps; mais on ne peut pas dissimuler que la plupart de ses systêmes philosophiques, enfantés par l'imagination et contredits par la nature, ont déja disparu, et n'ont produit d'autre avantage que d'abolir la tyrannie du péripatétisme. L'algèbre est redevable à Descartes de plusieurs remarques importantes sur la nature des équations, et de l'ingénieuse méthode des indéterminées. On ne connoissoit pas avant lui l'usage des racines négatives, et on les rejetoit comme inutiles; il fit voir qu'elles étoient tout aussi réelles que les racines positives, et que la seule distinction qu'on devoit mettre entre les unes et les autres ne dépendoit que de la manière d'envisager les quantités dont elles étoient les expressions. Il apprit à connoître, dans une équation qui ne contient que des racines réelles, le nombre des racines positives et celui des négatives, par la combinaison des signes qui précèdent les termes de l'équation. La règle qu'il propose pour cela fut d'abord vivement attaquée; mais elle est aujourd'hui hors d'atteinte par la démonstration générale que l'abbé de Gua en a donnée (1). Descartes explique sa méthode des indéterminées sur les équations du quatrième degré. Il feint que l'équation générale de ce degré est le produit de deux équations du second, qu'il affecte de coëfficients indéterminés; et, par la comparaison des termes de ce produit avec ceux de l'équation proposée, il obtient les valeurs des coëfficients inconnus. Les usages de cette méthode dans toutes les parties des mathématiques sont innombrables.

Je ne ferai point ici mention de plusieurs savants algébristes qui peu de temps après la mort de Descartes

(1) Mém. de l'acad. 1741.

éclaircirent et même perfectionnèrent ses méthodes. Mais on doit distinguer dans ce nombre le célèbre Hudde, bourgmestre d'Amsterdam, parce qu'il trouva un très-beau théorême concernant les équations qui contiennent des racines égales. Il fit voir que si l'on multiplie les termes d'une équation de cette espèce par ceux d'une progression arithmétique, la somme des produits est égale à zéro, et qu'elle forme une nouvelle équation, qui contient, à l'exception d'une, les racines égales de l'équation proposée. Il fonda sur cette propriété une règle fort simple pour découvrir le plus grand ou le moindre accroissement auquel une quantité variable peut parvenir.

Tous les esprits étoient en mouvement au temps dont je parle; les sciences marchoient d'un pas égal en se prêtant des secours mutuels. Il ne se passoit pas de jour que l'algèbre ne s'enrichît de quelque nouveauté, ou qu'on ne l'appliquât à d'importants usages. Wallis substitua les exposants fractionnaires à la place des signes radicaux, ce qui facilite et abrège les opérations dans plusieurs cas. Huguens, Barrow, et d'autres mathématiciens, résolurent par le calcul algébrique des problêmes que les anciens n'auroient pas soupçonné qu'on pût attaquer avec une apparence de succès.

Malgré tant d'efforts et de découvertes, il restoit toujours un écueil où la sagacité des algébristes venoit échouer, c'étoit la résolution complète des équations. Newton (1) la chercha longtemps: il ne la trouva point, mais il recula d'ailleurs considérablement les bornes de l'algèbre. Il donna une méthode pour décomposer, lorsque la chose est possible, une équation en facteurs commensurables: méthode qui s'étend à tous les degrés, et dont la pratique est aussi simple qu'on puisse le desi-

(1) Né en 1642, mort en 1727.

rer; il somma les puissances quelconques des racines d'une équation; la théorie de l'élimination lui doit son origine et ses progrès les plus marqués; il enseigna l'art d'extraire, s'il y a lieu, les racines des quantités en partie commensurables, en partie incommensurables; il inventa un genre de suites infinies, dont il se servit pour trouver d'une manière approchée les racines des équations numériques et littérales de tous les degrés: méthode qui suppléoit presque entièrement au défaut d'une résolution complète et rigoureuse.

On sent que, dans cette multitude de découvertes algébriques de Newton, il devoit s'en trouver nécessairement qui avoient besoin d'être développées et perfectionnées. Elles le furent par Halley, Maclaurin, Nicole, Stirling, Euler, Clairaut, etc.

La théorie des suites comprend plusieurs branches. Toutes ont été cultivées avec succès, et depuis plus de cent ans on ne cesse d'en faire les plus profondes applications. Jacques Bernoulli, Taylor, Nicole, Stirling, Maclaurin, Euler, Lambert, etc. se sont le plus distingués dans ces recherches. Il y a environ quatre-vingts ans que les suites récurrentes se présentèrent pour la première fois à Moivre, à l'occasion de quelques problêmes relatifs aux jeux de hasard. Mais c'est entre les mains de Daniel Bernoulli, d'Euler, et du P. Riccati, qu'avec le simple secours de l'algèbre ordinaire, cette théorie s'est accrue et généralisée: elle a fait dans la suite de nouveaux progrès par le moyen du *calcul aux différences finies.*

On a encore tenté de notre temps la résolution générale des équations de tous les degrés. Mais, quoique les géomètres célèbres qui se sont occupés de ce problême aient fait des observations nouvelles sur la nature des équations et sur la forme de leurs racines, ils n'ont point résolu complètement le cinquième degré ni aucun

des degrés supérieurs. La nature de ce discours ne me permet pas d'exposer leurs travaux et les connoissances qu'ils ont ajoutées à l'algèbre. Une discussion approfondie et motivée demanderoit une longue analyse de plusieurs ouvrages chargés de calculs ; et un simple jugement dénué de cet appui m'exposeroit au danger de blesser, sans le vouloir, les droits de quelques-uns des véritables inventeurs.

J'ai fait en sorte de rassembler dans ce volume à peu près tout ce qu'il y a de plus important et de plus nécessaire à savoir de l'arithmétique et de l'algèbre. On a pu remarquer, dans les différentes éditions qui ont déja paru de ces traités, les soins que je me suis donnés successivement pour les améliorer : celle-ci fournira à cet égard une nouvelle preuve du desir que j'ai de mériter de plus en plus les bontés du public. J'ai ajouté en particulier dans l'arithmétique l'explication des nouvelles mesures, suivant le systême métrique.

Qu'on me permette encore un mot. Il m'est revenu indirectement que certains auteurs, qui ont écrit long-temps après moi, et à qui peut-être même la lecture de mes traités n'a pas été inutile, cherchent à les déprimer. Je leur abandonne sans peine ce triste moyen (si c'en est un) de faire valoir leurs propres ouvrages : loin d'imiter un tel exemple, je serai constamment juste envers eux, et je ne crains point qu'on m'applique jamais cette maxime de Tacite, fondée sur une profonde connoissance du cœur humain : *Proprium humani ingenii est odisse quem læseris.* (Vit. Agric. XLII.)

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

NOTIONS GÉNÉRALES.

I.

Les Mathématiques ont en général pour objet la mesure de la grandeur.

II.

On appelle *grandeur* ou *quantité*, tout être susceptible d'augmentation ou de diminution : tels sont les nombres, les lignes, les surfaces, les temps, les vîtesses, les poids, etc. Chaque espèce de grandeur a son unité particulière qu'on choisit arbitrairement, ou que l'usage détermine. Ainsi, par exemple, si dans les mesures géographiques l'on prend la lieue pour unité, cette unité ou échelle, répétée convenablement, soit en totalité, soit partiellement, servira à évaluer les distances qui se trouvent entre les villes et les autres points remarquables placés sur la surface de la terre.

III.

La *quantité*, quelque soit son état actuel, étant toujours susceptible d'augmentation ou de diminution, rien ne borne le degré d'accroissement ou de décroissement auquel elle peut parvenir. Si elle demeure dans des limites que l'esprit puisse saisir et assigner, elle est *finie*; mais si elle augmente ou diminue jusqu'à devenir plus

grande ou plus petite que toute quantité finie déterminable, elle est *infinie* ou *infiniment petite.*

Une quantité qui n'a pas de mesure fixe et déterminée, s'appelle quantité ou grandeur *indéfinie.*

IV.

On divise toutes les sciences mathématiques, en *mathématiques pures* et *mathématiques mixtes.*

Les mathématiques pures considèrent la grandeur en elle-même, ou simplement comme grandeur, et abstraction faite des corps auxquels elle peut être attachée, soit comme substance, soit comme modification: elles comprennent l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, le calcul différentiel et le calcul intégral.

Les mathématiques mixtes empruntent de la physique, ou de l'essence de la matière, quelque propriété primordiale, d'où elles tirent, à l'aide des mathématiques pures, toutes les autres propriétés qui se rapportent au sujet dont elles traitent : cette classe comprend la mécanique, l'hydrodynamique, l'astronomie, l'optique et l'acoustique.

On donne les définitions de toutes ces sciences, à mesure qu'on en traite.

V.

Les propositions qui forment une partie quelconque des mathématiques, peuvent être comprises sous les noms d'*axiomes*, de *théorêmes*, de *problêmes*, de *corollaires*, de *lemmes*, de *scholies*, et de simples *remarques*, sans compter les définitions ou explications des termes qu'on emploie, et les autres notions préliminaires.

VI.

L'*Axiome* est une proposition évidente par elle-même, et qui n'a pas besoin de preuve. Ainsi les propositions suivantes; *le tout est plus grand qu'une de ses parties*; *si à des grandeurs égales on ajoute une*

même grandeur, les sommes qu'on formera par ces additions seront égales, sont des axiomes.

VII.

Le *Théorême* est une proposition qu'on affirme, et dont la vérité a besoin d'être démontrée. Ainsi, quand je dis *la somme des trois angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits*, je forme un théorême dont la géométrie démontre la vérité.

VIII.

Le *Problême* est une proposition dans laquelle il s'agit de découvrir quelque vérité, ou d'exécuter quelque opération. Ainsi ces propositions; *mesurer la largeur d'une rivière; déterminer la hauteur d'un nuage*, sont des problêmes que la géométrie enseigne à résoudre.

IX.

Le *Corollaire* est une conséquence d'une définition donnée, d'un théorême démontré, ou d'un problême résolu.

X.

Le *Lemme* est un théorême, ou un problême, qu'on ne démontre, ou ne résout, que pour servir de préparation à un autre théorême ou problême.

XI.

Le *Scholie*, dans toute l'étendue de la signification qu'on lui attribue, est une réflexion ou une suite de réflexions, tendante à faire sentir l'utilité d'une proposition et les usages auxquels cette proposition peut être employée, ou bien à montrer l'accord de plusieurs propositions qu'on récapitule, et les conséquences qui en résultent.

XII.

La *Remarque* est une espèce de scholie, dont l'objet se borne ordinairement à indiquer l'usage d'une proposition et à la faire bien comprendre, ou à rapprocher quelques vérités, ou à simplifier quelque opération de calcul, etc.

AVERTISSEMENT.

Nous distinguerons par numéros les propositions ou les articles d'un même traité ; et nous les rappellerons dans le besoin, en les citant entre deux parenthèses. Ainsi, par exemple, cette citation (4), veut dire que l'endroit où elle se trouve est fondé sur l'article 4 qu'il faut relire ou avoir présent à l'esprit. Si dans un traité on est obligé de rappeler un article d'un autre traité, on écrit en abrégé le nom de ce dernier traité au devant du numéro de l'article dont on a besoin, et on enferme le tout entre deux parenthèses. Par exemple, cette citation *(Arith. 34)* signifie qu'on s'appuie sur l'article 34 de l'arithmétique : ainsi des autres.

PREMIÈRE PARTIE.

ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de la numération.

1. L'ARITHMÉTIQUE est la science des nombres.

2. On appelle *nombre* l'assemblage de plusieurs *unités*, ou de plusieurs parties de l'*unité*; et on nomme *unité* la quantité qui, parmi toutes celles d'une même espèce, forme *un tout* qui en est regardé comme la base ou l'élément générateur. Ainsi, quand je dis *une* maison, *un* franc, j'énonce des *unités*, dont la première est la chose nommée *maison*; la seconde est la chose nommée *franc*: mais quand je dis *quatre maisons*, *dix francs*, *trois quarts de franc*, j'énonce des *nombres*, dont le premier est l'unité *maison* répétée *quatre fois*; le second est l'unité *franc* répétée *dix fois*; le troisième est la quatrième partie de l'unité *franc* répétée *trois fois*.

3. L'*unité* est, dans chaque formation particulière de nombres, une mesure prise arbitrairement ou établie par l'usage. Il y a une grande diversité à cet égard parmi les différents peuples, et même quelquefois parmi les peuples soumis à un même gouvernement un peu étendu. Par exemple, dans les mesures de longueur, le pied de France n'est pas le même que celui d'Angleterre; l'aune n'est pas

la même dans toute l'étendue de la France. Mais, quand on est une fois convenu de l'unité, dans les différentes espèces de quantités, la comparaison de tous les nombres avec leur unité se fera par les opérations que nous expliquerons dans la suite.

4. Les nombres formés par la répétition de l'unité entière, s'appellent *nombres entiers*, *nombres incomplexes*. Par exemple, *dix francs*, *trente* maisons, sont des nombres entiers ou des nombres incomplexes : ceux qui sont formés par l'assemblage de plusieurs parties de l'unité, s'appellent *nombres fractionnaires*, ou simplement *fractions*, quelquefois *nombres complexes* dans le sens que j'expliquerai dans la suite. Je considère ici les nombres entiers ou incomplexes ; je traiterai séparément et en détail des nombres fractionnaires.

5. On appelle en général *calcul* l'opération ou l'ensemble des opérations que l'on fait suivant les conditions d'une question, pour déterminer les nombres qui en résultent, comparativement à la grandeur qui est regardée comme l'unité. De là le mot *calculer*. Les règles pour calculer ou compter composent l'art de la *numération*.

6. Lorsque l'unité désigne quelque espèce de chose en particulier, comme *un* homme, *un* franc, la collection de plusieurs de ces unités s'appelle un nombre *concret*. Ainsi *dix* hommes, *trente francs*, sont des nombres concrets ; mais si l'unité ne désigne rien en particulier, et s'exprime simplement par *un* ou par *une fois*, le nombre qui est formé de ces unités, s'appelle nombre *abstrait*. Par exemple, *huit*, *dix fois*, *trente fois*, sont des nombres abstraits. Il est évident que les nombres abstraits se comparent à leur unité, comme les nombres concrets se comparent à la leur : mais il n'est jamais permis ni possible de comparer un nombre abstrait avec un nombre concret, ni un nombre concret avec un autre nombre concret de différente espèce ; car il ne peut exister de relations qu'entre des quantités de même nature.

7. Comme la suite des nombres, dans toute espèce de calcul, n'a point de fin; si chaque nombre particulier devoit être représenté par un signe ou un caractère particulier et individuel, il faudroit employer une infinité de signes; et bientôt la numération deviendroit impossible, par la difficulté de retenir et de combiner des signes, aussitôt que leur nombre passe certaines bornes, soumises à la foiblesse des facultés humaines. Mais on a trouvé heureusement l'art d'éviter cet inconvénient et de représenter tous les nombres possibles, par le moyen d'un petit nombre de caractères que l'on combine entre eux suivant des lois qui ne fatiguent point notre mémoire et notre intelligence. Il existe à cet égard plusieurs systèmes de numération, et on en pourroit imaginer une infinité d'autres. Je vais exposer celui qui a été adopté presque généralement, dès la plus haute antiquité, et qui est suivi aujourd'hui dans toute l'Europe.

8. Ce systéme est fondé sur deux principes de convention : 1.° on représente un certain nombre de termes de la suite infinie des nombres, par des caractères particuliers, appelés vulgairement *chiffres* ; 2.° on fait valoir ces chiffres, plus ou moins, par les différentes places qu'on leur fait occuper. Développons cette indication générale.

9. Les neuf premiers nombres de la suite infinie sont exprimés chacun par un caractère ou *chiffre* particulier et individuel, comme on le voit ici :

Noms..	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.
Chiffres	1	2	3	4	5	6	7	8	9.

Au moyen de cette supposition, on compte depuis *un* jusqu'à *neuf*, sans aucun art.

10. Pour compter au-delà de neuf, on emploie encore un caractère, savoir 0 (qui se prononce *zéro*), lequel n'a point de valeur par lui-méme, mais dont la fonction est de faire changer de valeur aux chiffres significatifs, en cette sorte :

On forme de la collection de dix unités simples une nouvelle unité que, par cette raison, on appelle *dixaine*, et on compte ces dixaines avec les neuf chiffres significatifs proposés, depuis l'*unité de dixaine* jusqu'à *neuf dixaines* inclusivement ; mais comme ces nouveaux nombres sont exprimés par les mêmes caractères que les neuf premiers de la suite infinie, on distingue les uns des autres par le moyen du zéro. Ainsi, pour exprimer une *dixaine*, on écrit 10, où l'on voit que le zéro occupe la première place à droite, et qu'en faisant reculer le chiffre 1, d'un rang vers la gauche, il donne à ce chiffre la valeur *une dixaine*, tandis que ce même chiffre ne représenteroit qu'une *unité simple*, s'il étoit isolé.

De même, pour exprimer *deux dixaines*, on écrit 20; pour *trois dixaines*, on écrit 30; ainsi de suite. Le zéro fait partout valoir le chiffre écrit à sa gauche dix fois plus qu'il ne vaut dans sa signification primitive.

Quant aux nombres compris entre *dix* et *vingt*, entre *vingt* et *trente*, entre *trente* et *quarante*, etc. ils s'expriment par deux chiffres, dont celui de la droite exprime les unités simples, l'autre les dixaines. Par exemple, pour exprimer *quarante-cinq*, on écrit 45; pour exprimer *soixante-quatre*, on écrit 64.

La table suivante contient la nomenclature en langue ordinaire, et la traduction en chiffres, pour les nombres depuis *dix* jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf*. Il seroit naturel qu'après avoir employé les mots *trente, quarante, cinquante, soixante*, on employât par analogie les mots *septante*, *octante*, *nonante*; mais ces derniers mots ont vieilli; et l'usage qui est le tyran des langues, veut qu'à leur place on dise aujourd'hui *soixante-dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*.

Noms.	Chiff.	Noms.	Chiff.	Noms.	Chiff.
Dix.......	10	Quarante......	40	Soixante-dix.......	70
Onze......	11	Quarante-un....	41	Soixante-onze......	71
Douze.....	12	Quarante-deux .	42	Soixante-douze.....	72
Treize.....	13	Quarante-trois..	43	Soixante-treize.....	73
Quatorze...	14	Quarante-quatre.	44	Soixante-quatorze...	74
Quinze	15	Quarante-cinq..	45	Soixante-quinze	75
Seize......	16	Quarante-six...	46	Soixante-seize......	76
Dix-sept....	17	Quarante-sept..	47	Soixante-dix-sept...	77
Dix-huit....	18	Quarante-huit..	48	Soixante-dix-huit...	78
Dix-neuf ...	19	Quarante-neuf..	49	Soixante-dix-neuf. ..	79
Vingt	20	Cinquante.....	50	Quatre-vingt......	80
Vingt-un....	21	Cinquante-un...	51	Quatre-vingt-un....	81
Vingt-deux .	22	Cinquante-deux.	52	Quatre-vingt-deux...	82
Vingt-trois..	23	Cinquante-trois.	53	Quatre-vingt-trois...	83
Vingt-quatre.	24	Cinquante-quatre	54	Quatre-vingt-quatre .	84
Vingt-cinq..	25	Cinquante-cinq..	55	Quatre-vingt-cinq...	85
Vingt-six...	26	Cinquante-six...	56	Quatre-vingt-six....	86
Vingt-sept..	27	Cinquante-sept..	57	Quatre-vingt-sept...	87
Vingt-huit..	28	Cinquante-huit..	58	Quatre-vingt-huit...	88
Vingt-neuf..	29	Cinquante-neuf.	59	Quatre-vingt-neuf...	89
Trente.....	30	Soixante......	60	Quatre-vingt-dix....	90
Trente-un ..	31	Soixante-un....	61	Quatre-vingt-onze ..	91
Trente-deux.	32	Soixante-deux..	62	Quatre-vingt-douze..	92
Trente-trois.	33	Soixante-trois ..	63	Quatre-vingt-treize. .	93
Trente-quatre	34	Soixante-quatre .	64	Quatre-vingt-quatorze	94
Trente-cinq .	35	Soixante-cinq ..	65	Quatre-vingt-quinze.	95
Trente-six ..	36	Soixante-six ...	66	Quatre-vingt-seize ..	96
Trente-sept..	37	Soixante-sept. ..	67	Quatre-vingt-dix-sept.	97
Trente-huit .	38	Soixante-huit...	68	Quatre-vingt-dix-huit.	98
Trente-neuf.	39	Soixante-neuf..	69	Quatre-vingt-dix-neuf.	99

11. De la même manière qu'on a formé de dix unités simples une *dixaine*, on forme de *dix dixaines* une nouvelle unité qu'on appelle *centaine*; et au moyen de ces nouvelles unités, qui s'expriment toujours par les caractères proposés, on compte depuis *cent* jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en faisant occuper aux centaines la troisième place à gauche. Ainsi, pour exprimer une *centaine*, on écrit 100; pour deux *centaines*, on écrit 200; pour trois *centaines*, on écrit 300; ainsi de suite.

Quant aux nombres compris entre *cent* et *deux cents*, entre *deux cents* et *trois cents* ....; pour exprimer *cent un*, on écrit 101 ; pour *cent deux*, on écrit 102 ....; pour *cent trois*, on écrit 103....; pour *cent onze*, on écrit 111; pour *cent douze*, on écrit 112; pour *cent treize*, on écrit 113...; pour *cent vingt-un*, on écrit 121; pour *cent vingt-deux*, on écrit 122 ...., etc. Nos lecteurs continueront d'eux-mêmes cette table, qui est de même nature que la précédente. Je suppose que l'on connoisse la nomenclature ordinaire des nombres, qui est, en effet, familière à tout le monde.

12. En formant pareillement de dix centaines une nouvelle unité ou un *mille*, et faisant occuper la quatrième place à gauche aux mille, on parviendra à compter depuis l'unité jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*; ainsi de suite, en continuant de former de nouvelles unités qui soient décuples des précédentes, et qui se reculent toujours vers la gauche. Soit, par exemple, proposé d'exprimer le nombre *quatre cent soixante-quatre mille neuf cent quarante-neuf*, on l'écrira ainsi 464949.

13. Il suit de tout ce qui précède qu'à mesure qu'on recule un chiffre vers la gauche, ce chiffre vaut dix fois, ou cent fois, ou mille fois, etc, davantage. Par exemple, le chiffre 5, pris ainsi tout seul, représente cinq unités; mais si on met un zéro à sa droite ou qu'on écrive 50, il vaudra *cinq* dixaines ou *cinquante* unités; s'il est accompagné de deux zéros ou qu'on ait 500, il vaudra *cinq centaines* ou *cinq cents* unités; ainsi de suite. Par la raison contraire un chiffre vaut dix fois, 100 fois, 1000 fois, etc. moins, à mesure qu'on l'avance d'un rang vers la droite.

14. On voit encore que si, parmi les caractères qui expriment un nombre, il se trouve un ou plusieurs zéros, cela signifie qu'il n'y a pas d'unités de l'ordre auquel ces zéros répondent. Par exemple, dans le nombre 504 le zéro occupe la place des dixaines qui manquent, et ne sert qu'à faire signifier des centaines au chiffre 5 qui est à

gauche. Le nombre dont il s'agit s'énonce donc ainsi, *cinq cent quatre unités*. Pareillement, dans le nombre 6007, il n'y a ni centaines ni dixaines, et il s'énonce ainsi, *six mille sept unités*.

15. Des mêmes principes suit la manière d'énoncer un nombre composé de tant de caractères qu'on voudra. Pour faciliter cet énoncé, on partage, en allant de droite à gauche, le nombre proposé en tranches composées chacune d'un certain nombre de chiffres: ce nombre est arbitraire, seulement il doit être petit pour soulager la mémoire; l'usage est de ne pas donner plus de trois chiffres à chaque tranche : sur quoi il faut observer que la dernière tranche à gauche peut ne contenir que deux chiffres ou même qu'un seul chiffre. La première tranche, en allant toujours de droite à gauche, s'appelle la *tranche des unités*, et contient des unités, des dixaines d'unités, et des centaines d'unités; la seconde s'appelle la *tranche des mille*, et contient des unités de mille, des dixaines de mille, et des centaines de mille; la troisième s'appelle la *tranche des millions*, et contient des unités de millions, des dixaines de millions, et des centaines de *millions*, etc. Cela posé, on énonce les tranches, en allant de gauche à droite, comme si chacune existoit seule; mais à la fin de chaque énoncé on prononce le nom des unités de la tranche. Soit, par exemple, à énoncer le nombre suivant 54345648964789. On peut l'écrire ainsi :

5.e tranc.	4.e tranc.	3.e tranc.	2.e tranc.	1.e tranc.
54	345	648	964	789
trillions,	billions,	millions,	mille,	unités.

Et alors on dira cinquante-quatre *trillions*, trois cent quarante-cinq *billions*, six cent quarante-huit *millions*, neuf cent soixante-quatre *mille*, sept cent quatre-vingt-neuf *unités*. Dans la pratique on se contente de séparer les tranches les unes des autres par de petites barres verticales; on n'écrit point les noms des tranches, la mémoire se charge de les retenir. Ainsi le nombre précédent s'écrit ainsi : 54|345|648|964|789, et se prononce comme on vient de voir.

CHAPITRE II.

Numération des parties décimales.

16. L'UNITÉ simple ou principale qui sert d'échelle à la numération, étant dans tous les cas une quantité arbitraire et susceptible d'augmentation ou de diminution; de la même manière qu'en la décuplant continuellement nous avons formé des dixaines, des centaines, des mille, etc. qui composent une suite ascendante de droite à gauche, rien ne nous empêche de prendre la suite dans un ordre opposé, et de former, en allant de gauche à droite, une nouvelle suite d'unités qui soient continuellement sous-décuples, c'est-à-dire, la *dixième*, la *centième*, la *millième*, etc. partie de l'unité principale. Ces nouvelles unités s'appellent en général *parties décimales*.

17. Pour distinguer les parties décimales d'avec les unités principales, on écrit après celles-ci une virgule; ensuite, après cette virgule, et allant de gauche à droite, on écrit les parties décimales. Suivant cet ordre, et les parties décimales étant toujours prises comparativement à l'unité principale, le premier chiffre après la virgule exprime des *dixièmes*; le second, des *centièmes*; le troisième, des *millièmes*; le quatrième, des *dix-millièmes*; ainsi de suite. Il en est donc des parties décimales comme des unités simples; à mesure qu'un chiffre avance d'un rang vers la droite, il devient dix fois plus petit: et réciproquement. Ainsi, dans le nombre 345,7, le chiffre 7 exprime sept *dixièmes*; dans le nombre 346,07, le chiffre 7 exprime sept *centièmes*; dans le nombre 345,007, le chiffre 7 exprime sept *millièmes*, etc. On voit par là, en même temps, que si dans un nombre il manque des parties décimales d'un certain ordre, les places de cet ordre sont occupées par des zéros.

18. Cela bien entendu, il est facile d'énoncer un nombre qui contient des parties décimales. Soit, par exemple, le nombre 423,549. Les chiffres écrits à gauche de la virgule représentent quatre cent vingt-trois *unités simples*; le chiffre 5 qui vient immédiatement après la virgule, exprime cinq *dixièmes* de l'unité simple; le chiffre 4 en exprime quatre *centièmes*; le chiffre 9 neuf *millièmes*; par conséquent, le nombre 423,549 peut d'abord s'énoncer ainsi, quatre cent vingt-trois *unités*, cinq *dixièmes*, quatre *centièmes*, neuf *millièmes*. Mais, comme chaque unité de dixième vaut une dixaine de centièmes et une centaine de millièmes, et que chaque unité de centième vaut une dixaine de millièmes, il est clair qu'au lieu de dire cinq dixièmes, quatre centièmes, neuf millièmes, nous pouvons dire cinq cent quarante-neuf *millièmes*. Notre nombre 423,549 s'énoncera donc : quatre cent vingt-trois *unités*, cinq cent quarante-neuf *millièmes*. De même le nombre 54,3075, où il n'y a point de centièmes, s'énonce : cinquante-quatre *unités*, trois mille soixante et quinze *dix-millièmes*. Le nombre 0,5408, où il n'y a ni unités simples ni millièmes, s'énonce : cinq mille quatre cent huit *dix-millièmes*; ainsi des autres.

19. Les nombres qui contiennent des unités simples et des parties décimales, peuvent encore s'énoncer d'une manière plus abrégée, en considérant que chaque unité simple vaut dix *dixièmes*, ou cent *centièmes*, ou mille *millièmes*, ou, etc.; que chaque dixaine vaut cent *dixièmes*, ou mille *centièmes*, ou dix mille *millièmes*, ou, etc.; que chaque centaine vaut mille *dixièmes*, ou dix mille *centièmes*, ou cent mille *millièmes*, ou, etc. D'où il suit que, par exemple, le nombre 423,549 pourra se prononcer : quatre cent vingt-trois mille cinq cent quarante-neuf *millièmes*. On voit que dans cet énoncé les *millièmes* sont regardés, par rapport aux autres chiffres à gauche, comme faisant la fonction d'unités simples. On entendra la même chose, avec les changements convenables, pour les autres nombres de cette espèce. De là il suit qu'on

Le signe $=$ indique l'égalité de deux quantités. Ainsi l'expression $3+4=7$, veut dire que la somme $3+4$ est *égale* à 7.

26. Tout nombre qui n'est exprimé que par un seul chiffre s'ajoute à un autre nombre quelconque, par les premiers principes de la numération. Par exemple, si au nombre 15 on veut ajouter le nombre 8, la question est dans le fond de former une suite de nombres à partir de 15, par l'addition successive de chacune des unités du nombre 8 : ces nombres sont $15+1$, ou 16; $16+1$, ou 17; $17+1$, ou 18. . . . . et finalement 23 qui est la somme demandée; ensorte que $15+8=23$. Mais, avec un peu d'exercice, et en très-peu de temps, on apprendra à trouver tout d'un coup le résultat final, sans faire toutes les additions partielles dont nous venons de parler. On verra de même que $349+7=356$; que $7489+8=7497$; ainsi des autres. Cette première opération, par laquelle on ajoute un nombre exprimé par un *seul chiffre*, à un nombre quelconque, se fait sans aucun art, et par les seules notions primordiales des nombres : elle sert de base à l'addition des nombres exprimés par tant de caractères qu'on voudra, comme nous allons l'expliquer.

27. Problème I. *Ajouter ensemble plusieurs nombres incomplexes quelconques.*

Ecrivez tous ces nombres les uns sous les autres, en observant de placer dans la même colonne verticale les unités du même ordre, c'est-à-dire les unités simples sous les unités simples, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, etc. Les nombres étant ainsi disposés, tirez au dessous une barre horizontale ; ajoutez ensemble successivement tous les chiffres d'une même colonne verticale, en commençant par la colonne qui contient les unités du plus bas ordre, et en passant successivement aux autres colonnes de la gauche. Si la somme des nombres d'une même colonne peut s'exprimer par un seul chiffre, vous le placerez dans cette colonne au dessous de la barre ; si la somme est exprimée par plus d'un

chiffre, vous placerez celui de la droite dans la colonne proposée comme étant du même ordre qu'elle, et vous retiendrez les autres pour les joindre avec la somme des nombres de la colonne voisine à gauche. Mêmes opérations successivement pour toutes les colonnes. Il est clair que le nombre total écrit au dessous de la barre et résultant de toutes les opérations qu'on vient d'indiquer est la somme demandée, puisqu'il est l'assemblage des unités, des dixaines, des centaines, etc. qui composent les nombres qu'on devoit ajouter.

28. Exemple I. *Ajouter ensemble les nombres suivants*, 5049; 7898; 459.

Ces nombres étant écrits comme on le voit ici, premièrement j'ajoute ensemble les unités, en disant 9 et 8 font 17, et 9 font 26; j'écris le chiffre 6 sous la colonne des unités, et je retiens le chiffre 2 qui exprime des dixaines, pour l'ajouter	5049 7898 459 ――― 13406

avec la colonne des dixaines. Passant à cette colonne, je dis 2 de retenus et 4 font 6, et 9 font 15, et 5 font 20; j'écris 0 sous la colonne des dixaines, et je retiens 2 centaines pour les joindre à la troisième colonne. A cette colonne je dis 2 de retenus et 0 font toujours 2, et 8 font 10, et 4 font 14; j'écris 4 sous la colonne des centaines, et je retiens 1 mille pour la colonne des mille. Je continue, et je dis 1 de retenu et 5 font 6, et 7 font 13, que j'écris, en mettant le chiffre 3 sous les mille et le chiffre 1 au rang des dixaines de mille. Les opérations sont ainsi finies, et on a 13406 pour la somme des trois nombres qu'il falloit ajouter ensemble.

29. Exemple II. *Ajouter les nombres suivants*, 458; 98475; 24; 94002.

J'écris les quatre nombres qu'il faut ajouter ensemble, comme on le voit ici; puis j'ajoute ensemble les chiffres qui composent chaque colonne, en commençant par celle des unités, et passant successivement aux dixaines, aux cen-	458 98475 24 94002 ――― 192959

taines, aux mille, etc., comme dans l'exemple précédent. La somme est 192959.

30. Problème II. *Ajouter ensemble plusieurs nombres accompagnés de parties décimales.*

Disposez tous ces nombres de manière que les unités soient placées sous les unités, les dixaines sous les dixaines, etc.; et que semblablement les dixièmes soient placés sous les dixièmes, les centièmes sous les centièmes, etc. Puis faites l'addition, comme dans le problême précédent, en commençant par la colonne des parties décimales du plus bas ordre, et passant successivement aux colonnes supérieures jusqu'à ce qu'on les ait toutes épuisées.

31. Exemple I. *Ajouter ensemble les nombres* 478; 489,745; 8,03; 0,029.

Ayant disposé les nombres comme on le voit ici, on les additionnera, en commençant par la colonne des millièmes qui sont les unités du plus bas ordre, et venant ensuite aux autres colonnes à gauche : on trouvera pour somme 975,804.

478
489,745
8,03
0,029
975,804

32. *Remarque.* Comme on ne change point (21) la valeur d'un nombre en écrivant à la droite de la virgule décimale, tant de zéros qu'on voudra, on auroit pu donner le même nombre de places décimales aux nombres proposés, en les écrivant sous la forme qu'on voit ici : la somme est toujours la même. Par ce moyen, les unités du plus bas ordre se trouvent de la même espèce, ce qui est plus clair et marque mieux la distinction des places. Cette observation s'applique à tous les nombres qui contiennent des parties décimales d'ordres différents.

478,000
489,745
8,030
0,029
975,804

33. Exemple II. *Ajouter les nombres* 45,0484; 9462; 125,079; 4,7926.

J'écris ces nombres comme on le voit ici, et je trouve pour somme 9936,9200. On peut supprimer dans ce nombre les deux zéros de la fin sans en changer la valeur (22). Notre somme est donc 9936,92.

45,0484
9462,0000
425,0790
4,7926
9936,9200

34. *Scholie*. Les nombres que nous avons additionnés dans tous ces exemples sont *abstraits*, ou présentés sous cette forme; mais il est clair qu'il faudroit opérer de même, si ces nombres étoient *concrets*. J'entends *concrets de la même espèce*; car, suivant la remarque générale que nous avons déja faite (6), on ne peut comparer ensemble, ni par conséquent ajouter les uns aux autres des nombres concrets de différentes espèces. Supposons, par exemple, qu'on ait prêté à un homme en différents temps, ou en différentes parties, les nombres concrets 5445 fr., 948 fr., 869 fr.; et qu'on veuille savoir à combien se monte le prêt total: on ajoutera ensemble tous ces nombres comme s'ils étoient abstraits. On trouvera que la somme est 7262. On affectera cette somme de la caractéristique F qui signifie *francs*; et on conclura que le prêt total est 7262 F.

5445
948
869
7262

Cet exemple montre un usage de l'addition dans la société.

CHAPITRE IV.

De la soustraction des nombres incomplexes.

35. La soustraction est une opération par laquelle on trouve la *différence* de deux nombres.

On indique par le signe — qui veut dire *moins* une soustraction à faire. Ainsi l'expression 9—3, qui se prononce 9 *moins* 3, signifie que du nombre 9 il faut ôter ou soustraire le nombre 3.

36. Les règles pour la soustraction des nombres expri-

més par tant de caractères qu'on voudra, supposent préliminairement qu'on sache soustraire un nombre exprimé par un seul caractère, d'un nombre moindre que 20; opération qui se fait sans aucun art, par les premiers principes de la numération, et en renversant le raisonnement qui a été fait (26) pour l'addition. Il faut donc savoir d'abord que $7-5=2$; que $6-3=3$; que $17-9=8$; que $15-8=7$; ainsi des autres. Avec ces notions qui sont faciles, et dont l'application ne peut pas fatiguer la mémoire, on sera en état de résoudre les problèmes suivants.

37. Problème I. *Trouver la différence de deux nombres entiers, exprimés par tant de caractères qu'on voudra.*

Ecrivez le plus grand de ces deux nombres le premier; mettez le second au dessous, de manière que les unités de même espèce soient dans une même colonne, c'est-à-dire les unités sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, etc.; tirez une barre sous le tout : puis retranchez successivement, en allant de droite à gauche, chaque chiffre inférieur du chiffre supérieur correspondant, et écrivez au dessous de la barre les restes à mesure que vous les trouverez.

Il peut arriver dans le cours de ces soustractions partielles que quelque chiffre inférieur soit égal au chiffre supérieur, ou même le surpasse; dans le premier cas il faut mettre o au reste; dans le second, on augmentera le chiffre supérieur d'une dixaine, qu'on empruntera par la pensée, de son voisin à gauche; et, lorsqu'on passera à l'opération suivante, on tiendra compte de cet emprunt en diminuant d'une unité le chiffre sur lequel il a été fait.

Toutes ces opérations finies, le nombre écrit au dessous de la barre sera la différence des deux nombres proposés, puisqu'il contiendra le résultat des différences de toutes leurs parties.

38. Exemple I. *Il s'agit de retrancher du nombre* 8698 *le* [illegible]356.

J'écris ces nombres comme on le voit ici. En-*suite je* commence par retrancher les unités inférieures des unités supérieures, en disant, 6 ôté de 8 reste 2, que j'écris sous la barre dans la colonne des unités.	8698 356 8342

De même, je retranche les dixaines des dixaines, en disant 5 ôté de 9 reste 4, que j'écris sous la colonne des dixaines.

Je retranche les centaines des centaines, en disant 3 de 6 reste 3, que j'écris sous la colonne des centaines.

Enfin, comme il n'y a point de mille dans le nombre inférieur, les 8 mille du nombre supérieur restent en entier, et je les écris par conséquent dans la même colonne sous la barre.

La différence des deux nombres proposés, ou le reste de la soustraction, est donc 8342.

39. Exemple II. *Du nombre* 26784 *oter le nombre* 8956.

On écrira ces deux nombres, comme on le voit ici; et retranchant successivement les unités des unités, les dixaines des dixaines, les centaines des centaines, etc., on dira d'abord, 6 devroit être ôté de 4, mais cela n'est pas possible; ainsi	26784 8956 17828

j'emprunte sur le chiffre 8 des dixaines, qui est à gauche de 4, une unité de dixaines qui, jointe à 4, fait 14 unités, dont retranchant 6, reste 8, que j'écris à la première place.

Je poursuis, et j'observe que le chiffre 8 devant être diminué d'une unité pour la dixaine qu'on a empruntée sur lui, je dois ôter 5 de 7 seulement; ce qui donne 2 pour reste, que j'écris sous les dixaines.

A la colonne des centaines je dis, 9 devroit être ôté de 7; mais cela n'étant pas possible, j'emprunte sur le 6 un mille, qui vaut une dixaine de centaines, et alors j'ai 17, dont ôtant 9, reste 8, que j'écris sous la colonne des centaines.

A la colonne des mille je considère que le chiffre 6 ne doit plus être compté que pour 5, à cause de la dixaine

qu'on a empruntée sur lui; ainsi il faut ôter 8 de 5: mais comme cela ne se peut pas, nous emprunterons sur le 2 une dixaine de mille, qui, jointe à 5, donne 15, dont ôtant 8, reste 7, que j'écris sous les mille.

Enfin, à la colonne des dixaines de mille, le chiffre 2 ne doit plus être compté que pour 1, à cause de la dixaine qu'il a fournie aux mille; et comme on n'a rien à retrancher de ce chiffre, on a 1 pour reste, qui s'écrit sous les dixaines de mille.

La différence des deux nombres proposés, ou le reste de la soustraction, est donc 17828.

40. *Remarque I.* Il est clair qu'au lieu de diminuer d'une unité le chiffre sur lequel un emprunt a été fait ou a été censé se faire, on peut laisser ce chiffre tel qu'il est, pourvu qu'on augmente le chiffre inférieur d'une unité; ce qui est commode dans la pratique.

41. *Remarque II.* Si le chiffre sur lequel un emprunt doit se faire est un zéro, l'emprunt se fera sur le premier chiffre significatif qu'on trouvera à gauche. Ayant pris sur cet emprunt une dixaine pour avoir un nombre dont on puisse retrancher le chiffre inférieur correspondant, j'écris au nombre supérieur 9 au dessus de chacun des zéros compris depuis la colonne sur laquelle on opère jusqu'au chiffre significatif sur lequel l'emprunt a été fait; puis j'achève la soustraction en ne considérant que ces 9, et ne faisant plus attention aux zéros qui sont au dessous. La raison de ce procédé est qu'ayant pris une dixaine, ou sur 10 dixaines, ou sur 100 dixaines, etc., il reste évidemment ou 9 dixaines, ou 99 dixaines, ou, etc.

42. Exemple. *Du nombre* 34000 *ôter le nombre* 2456.

Les deux nombres étant écrits comme on le voit ici, je dis, comme 6 ne peut pas être retranché de zéro, j'emprunte 1 dixaine sur le chiffre 4. Or ce chiffre, par la nature de la place qu'il occupe, ésente des mille, ou des centaines de dixaines. 4, après avoir pris une dixaine, il m'en reste

```
   99
34000
 2456
-----
31544
```

99, que je place au dessus des deux zéros qui viennent à gauche après le premier. Maintenant je puis dire, 6 ôté de 10, reste 4, que j'écris.

Passant à la seconde colonne, et ne faisant pas attention au zéro, mais seulement au 9 qui est au dessus, je dis, 5 ôté de 9, reste 4, que j'écris.

A la troisième colonne je dis pareillement, 4 ôté de 9, reste 5, que je pose.

A la quatrième colonne je dis, 2 ôté de 3, ou 3 ôté de 4, reste 1, que je pose.

A la cinquième colonne j'écris 3 pour reste.

Le reste de la soustraction totale est donc 31544.

43. Problème II. *Trouver la différence de deux nombres quelconques, où il entre des parties décimales.*

Ayant écrit d'abord le plus grand de ces deux nombres, je place l'autre au dessous, de manière que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, etc., et que semblablement les dixièmes soient sous les dixièmes, les centièmes sous les centièmes, etc. : je fais la soustraction, comme dans le problème précédent, en commençant par les unités décimales du plus bas ordre, et passant successivement aux autres colonnes à gauche.

44. Exemple I. *Du nombre 345,78 ôter le nombre 25,4789.*

Ces deux nombres contiennent des parties décimales; mais comme ils n'en contiennent pas également, je supplée dans le premier les places vacantes par des zéros; ce qui n'en change pas la valeur (21). J'écris donc nos deux nombres, comme on le voit ici; ensuite la soustraction se fait absolument de la même manière que s'il n'y avoit pas de parties décimales, et on trouve 320,3011 pour reste.

$$\begin{array}{r} 345,7800 \\ \underline{25,4789} \\ 320,3011 \end{array}$$

45. Exemple II. *Du nombre 4734 ôter le nombre 415,4754.*

J'écris les deux nombres proposés, comme on le voit ici; et je trouve 4318,5246 pour reste.

$$\begin{array}{r} 4734,0000 \\ \underline{415,4754} \\ 4318,5246 \end{array}$$

46. *Scholie.* On doit faire ici une remarque analogue à celle qui a été faite (34) pour l'addition. On soustrait un nombre concret d'un autre nombre concret de même espèce, comme s'ils étoient tous abstraits; et on écrit, après la soustraction, la caractéristique qui marque leur espèce. Par exemple, si on me doit 5447 F. et qu'on me paye 2574 F.; je soustraits 2574 de 5447; ce qui donne pour reste 2873, que j'affecte de la caractéristique F; et je vois qu'il m'est encore dû 2873 F.

Preuve de la soustraction et de l'addition.

47. On appelle ici *preuve* une opération que l'on fait pour reconnoître si une soustraction ou une addition est juste ou non.

48. On s'assure qu'une soustraction a été bien ou mal faite par le moyen de l'addition, et cela en ajoutant le nombre soustrait avec le reste. Si la somme se trouve égale au nombre supérieur, la soustraction est bonne, sinon elle est défectueuse.

Ainsi, ayant trouvé que du nombre.	4789
ôtant le nombre.	548
le reste est.	4241
	4789

j'ajoute 548 avec 4241, et je trouve que la somme est 4789; d'où je conclus que ma soustraction est bonne. Si cette somme n'avoit pas été conforme au nombre supérieur, il auroit fallu recommencer la soustraction.

49. Réciproquement la soustraction peut servir à vérifier si une addition a été bien ou mal faite. Car, si de la somme qu'on a trouvée par l'addition on retranche la totalité des unités, celle des dixaines, celle des centaines, etc. il est clair que le reste de toutes ces soustractions partielles doit être zéro si l'addition a été bien faite.

Par exemple, supposons qu'on ait fait l'addition 345
qu'on voit ici. Si la somme 1067 est exacte, et qu'on 424
en retranche toutes les parties des nombres ajoutés, 298
le reste sera zéro. Or, pour déterminer ces parties, 1067
au lieu d'aller de droite à gauche, comme on a fait 110
dans l'addition, on ira de gauche à droite afin de varier l'opération, et d'éviter les erreurs dans lesquelles on pourroit être tombé d'abord. Je commence donc par *ajouter* ensemble les centaines des trois nombres 345, 424, 298; leur somme partielle est 9, que je retranche de 10, somme totale des centaines : reste 1 qui, avec les 6 dixaines de la somme totale vaut 16 dixaines. De ces 16 dixaines je retranche 15, somme partielle des dixaines des trois nombres proposés; reste 1 dixaine, qui, avec les 7 unités de la somme totale, vaut 17 unités; de ces 17 unités je retranche 17, somme partielle des unités; reste 0. D'où je conclus que l'addition avoit été bien faite : si j'avois eu un autre reste que 0, l'addition auroit été défectueuse, et il auroit fallu la refaire.

CHAPITRE V.

De la multiplication des nombres incomplexes.

50. La multiplication est une opération par laquelle il s'agit de répéter, ou d'ajouter à lui-même, un nombre donné, appelé *multiplicande*, autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre donné, appelé *multiplicateur* : le résultat de l'opération forme et s'appelle le *produit*.

Ainsi, par exemple, quand on propose de multi-
plier 47 par 5, la question est la même, dans le fond, 47
que s'il falloit ajouter 47 à lui-même 5 fois, comme 47
on le voit ici. La somme 235 est le produit demandé. 47
Mais cette manière de faire la multiplication seroit 47
trop longue, et deviendroit même impraticable, si 47
le mutiplicateur étoit fort grand. L'art d'abréger 235

l'opération est ce qu'on appelle proprement la multiplication.

On indique par le signe ×, qui veut dire *multiplié par*, une multiplication à faire. Ainsi 3×4, c'est-à-dire 3 *multiplié par* 4, indique qu'il faut multiplier 3 par 4. Les deux nombres qu'on multiplie l'un par l'autre (ici 3 et 4), s'appellent les *facteurs* du produit (ici 12).

51. Le multiplicande peut être indifféremment un nombre concret ou un nombre abstrait, parce qu'on peut répéter, autant de fois qu'on voudra, un nombre, quelle que soit la nature de ses unités. Mais le multiplicateur est toujours un nombre abstrait, puisqu'il exprime seulement le *nombre de fois* que le multiplicande doit être répété. Quant au produit, il est nécessairement de la même nature que le multiplicande, dont il se forme par une addition réitérée.

Dans la pratique du calcul, on considère, pendant le cours de l'opération, le multiplicande et le multiplicateur comme des nombres abstraits; mais quand elle est achevée, on fixe la nature et on écrit la caractéristique du produit, d'après l'espèce du multiplicande.

52. Tous les cas qui peuvent arriver dans la multiplication se réduisent à trois; ou les deux facteurs de la multiplication sont exprimés chacun par un seul chiffre; ou l'un des deux étant toujours exprimé par un seul chiffre, l'autre en contient plusieurs; ou enfin ils sont exprimés l'un et l'autre par plusieurs chiffres. La première opération sert de fondement aux deux autres. Or, la multiplication de deux nombres exprimés chacun par un seul chiffre, se fait par l'addition, c'est-à-dire, en ajoutant l'un de ces nombres avec lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre : elle peut s'abréger encore dans la pratique au moyen de la table suivante, qui est elle-même construite d'après les principes de l'addition, et qu'on attribue à Pythagore, soit que ce philosophe l'ait réellement inventée, soit qu'il en ait seulement répandu l'usage.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Cette table est composée, comme on voit, de 9 bandes horizontales, et chaque bande a 9 cases déterminées par des lignes verticales qui coupent les horizontales. Les cases de la première bande contiennent la suite des nombres, depuis 1 jusqu'à 9, laquelle se forme en ajoutant continuellement 1 à la première unité; les cases de la seconde bande se remplissent en ajoutant continuellement 2 au nombre 2 qui est dans la première case de cette même bande; les cases de la troisième bande se remplissent en ajoutant continuellement 3 au nombre 3 qui est dans la première case. Les cases des autres bandes se remplissent de même avec les nombres 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On voit que de cette formation de la table résultent des bandes verticales qui suivent la même loi que les bandes horizontales, et que, par conséquent, on peut faire indistinctement le même usage des unes et des autres.

Il est facile de continuer cette table plus loin; mais cela est inutile ici, parce que nous ne l'emploierons que pour apprendre à multiplier l'un par l'autre deux nombres exprimés chacun par un seul chiffre.

53. Voulez-vous, par exemple, multiplier 7 par 4 au moyen de la table dont il s'agit? vous chercherez le

multiplicande 7 dans la première bande verticale, et le multiplicateur 4 dans la première bande horizontale; le produit se trouve dans la case commune à la bande horizontale qui contient 7 et à la bande verticale qui contient 4; ce produit est donc 28; et il est clair, par la formation de la table, que ce produit est le véritable, puisque la case qui le contient est formée du nombre 7 répété 4 fois, ou ajouté 4 fois de suite.

On auroit pu chercher le 7 dans la première bande horizontale et le 4 dans la première bande verticale; on auroit trouvé également que le produit est 28. Cela peut servir à démontrer, si la chose paroît en avoir besoin, que le produit de 7 par 4 est le même que celui de 4 par 7, ou qu'en général le produit est le même en quelque ordre qu'on multiplie ensemble les facteurs d'une multiplication.

Quand on aura ainsi appris à trouver facilement, et avec le seul secours de la mémoire, le produit de deux nombres exprimés chacun par un seul chiffre, les règles suivantes apprendront à trouver le produit de deux nombres exprimés par tant de chiffres qu'on voudra, comme on va le voir.

54. Problème I. *Multiplier un nombre entier quelconque, par un nombre exprimé par un seul chiffre.*

J'écris le multiplicateur sous les unités du multiplicande; et ayant tiré une barre horizontale, je multiplie successivement les unités, les dixaines, les centaines, etc. du multiplicande par le multiplicateur; j'écris ces différents produits sous la barre, en observant à chaque multiplication partielle de retenir les dixaines pour les joindre avec les dixaines, les centaines pour les joindre avec les centaines, etc.

55. Exemple I. *On propose de multiplier le nombre* 4784 *par le nombre* 6.

Multiplicande . .	4784
Multiplicateur . .	6
Produit	28704

Ayant disposé le multiplicande et le multiplicateur comme on le voit
ence par multiplier les

unités du multiplicande par le multiplicateur, en disant 6 fois 4 font 24, c'est-à-dire quatre unités et 2 dixaines; j'écris les 4 unités à leur rang, et je retiens les 2 dixaines pour les joindre au résultat de l'opération suivante.

Passant aux dixaines du multiplicande, je dis 6 fois 8 font 48 dixaines, et 2 de retenues, font 50 dixaines; j'écris 0 au rang des dixaines, et je retiens 5 centaines.

A la colonne des centaines, je dis 6 fois 7 font 42 centaines, et 5 de retenues, font 47 centaines; j'écris 7 au rang des centaines, et je retiens 4 mille.

Enfin à la colonne des mille, je dis 6 fois 4 font 24 mille, et 4 de retenus, font 28 mille, que j'écris; et l'opération est achevée. Le produit cherché est donc 28704.

Dans la pratique on s'abstient en opérant de prononcer les mots *unités*, *dixaines*, *centaines*, etc., on sous-entend ces dénominations pour abréger; mais on doit bien prendre garde de ne pas confondre les rangs de ces différentes espèces d'unités.

56. Exemple II. *Multiplier le nombre* . . . 3004
par le nombre 8
Produit 24032

1.° Je dis 8 fois 4 font 32; j'écris les 2 unités, et je retiens 3 dixaines.

2.° Je dis 8 fois 0 ne peut donner que 0; mais dans la première opération j'ai retenu 3 dixaines que j'écris au rang des dixaines.

3.° Je dis 8 fois 0 donne 0; j'écris donc 0 au rang des centaines, et je vois que le produit ne contiendra point de centaines.

4.° Enfin je dis 8 fois 3 font 24 mille, que j'écris, et l'opération est achevée. Le produit cherché est donc 24032.

57. *Remarque.* Si le multiplicande étoit exprimé par un seul chiffre et le multiplicateur par plusieurs chiffres, il faudroit regarder le second nombre comme le multiplicande, et le premier comme le multiplicateur; ce qui

ramène ce cas au problême précédent, et ce qui est évidemment permis : car, par exemple, le produit est le même, soit qu'on multiplie 3 par 4, ou 4 par 3. En général, il est permis de faire cette permutation pour simplifier le calcul; car on peut, dans tous les cas, regarder le multiplicande et le multiplicateur comme des nombres abstraits pendant le cours de l'opération; la nature du produit ne se fixe et ne se caractérise qu'à la fin du calcul.

58. Problême II. *Multiplier l'un par l'autre deux nombres entiers, exprimés chacun par plusieurs chiffres.*

Il faut d'abord écrire le multiplicateur sous le multiplicande, unités sous unités, dixaines sous dixaines, centaines sous centaines, etc.; ensuite multiplier successivement tout le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, en allant de gauche à droite, ce qui donne autant de produits partiels que le multiplicateur contient de chiffres; enfin ajouter ensemble tous ces produits pour avoir le produit total. En faisant chaque produit partiel, on observera que le premier est un nombre d'unités, le second un nombre de dixaines, le troisième un nombre de centaines, etc.; ce qui détermine les places de leurs unités du plus bas ordre.

59. Exemple I. *Multiplier le nombre* 3648
par le nombre 743

Premier produit partiel	10944
Second produit partiel	14592
Troisième produit partiel	25536
Produit total	2710464

Les nombres étant disposés de la manière qui est exprimée ici, on fera chaque produit partiel comme dans les exemples précédents. On voit que, conformément à la règle prescrite, les unités du plus bas ordre dans le premier de ces produits, sont des unités simples; dans le second, des dixaines; dans le troisième, des centaines. Ces produits particuliers étant trouvés, je les ajoute ensemble, et leur somme 2710464 est le produit total qu'on demandoit.

60. Exemple II. *Multiplier le nombre* 3045
par le nombre 5004

Les produits partiels se trouvent toujours de la même manière : j'ai figuré ici à côté cet exemple comme le précédent, pour conserver l'analogie; mais dans la pratique

Premier produit partiel	12180
Second produit partiel	0000
Troisième produit partiel	0000
Quatrième produit partiel	15225
Produit total	15237180

on supprime le second et le troisième produits partiels qui ne contiennent que des zéros, et, après avoir trouvé le premier produit partiel, on passe tout de suite au quatrième, en observant que les unités du plus bas ordre de ce produit sont des mille. On voit ici l'opération.

3045
5004
12180
15225
15237180

61. *Remarque.* Lorsqu'il se trouve des zéros à la droite des facteurs de la multiplication, ou de l'un d'eux seulement, l'opération s'abrège : on peut alors faire abstraction de ces zéros, et multiplier seulement ensemble les chiffres situés à leur gauche; mais cette opération étant finie, on mettra à la droite du produit autant de zéros qu'il y en avoit à la droite des deux facteurs de la multiplication.

62. Exemple. *Multiplier* 64000 *par* 3400.

Je fais l'opération comme s'il s'agissoit de multiplier 64 par 34, et je trouve 2176 pour produit. A la droite de ce produit je mets cinq zéros; ce qui me donne 217600000 pour le produit véritable des deux nombres proposés 64000 et 3400.

63. Problème III. *Multiplier l'un par l'autre des nombres qui contiennent des parties décimales.*

Faites la multiplication comme si les deux nombres ne contenoient point de parties décimales, c'est-à-dire, en supprimant pour un moment les virgules décimales. Quand le produit sera ainsi trouvé, par les règles précédentes, séparez dans ce produit, vers la droite, par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout dans les

deux facteurs de la multiplication. Le calcul et la démonstration s'entendront facilement, pour tous les cas, au moyen des deux exemples suivants.

64. Exemple I. *Multiplier* 34,659 *par* 37.

Je supprime la virgule du multiplicande qui seul contient des parties décimales; ce qui me donne 34659 à multiplier par 37 : le produit est 1282383. Je sépare dans ce produit trois chiffres décimaux vers la droite par une virgule; ce qui me donne 1282,383 pour le véritable produit cherché.

Car, en supprimant la virgule du multiplicande, j'ai (20) un multiplicande fictif mille fois plus grand : alors les deux multiplicandes étant supposés répétés le même nombre de fois 37, le produit fictif 1282383 est mille fois plus grand que le véritable. Donc, pour avoir ce dernier, il faut rendre le premier mille fois plus petit, c'est-à-dire écrire 1282,383.

65. Exemple II. *Multiplier* 65,789 *par* 3,49.

Je supprime la virgule dans le multiplicande et dans le multiplicateur, qui contiennent l'un et l'autre des parties décimales; ce qui donne 65789 à multiplier par 349 : le produit est 22960361. Je sépare dans ce produit, au moyen d'une virgule, cinq chiffres décimaux vers la droite, parce qu'il y en a cinq dans le multiplicande et le multiplicateur pris ensemble; par là j'ai 229,60361 pour le véritable produit des deux nombres proposés.

En effet, on voit, 1.° par l'exemple précédent, qu'en supprimant la virgule du multiplicande et conservant le même multiplicateur, on auroit un produit fictif mille fois plus grand que le vrai produit; 2.° en supprimant de plus la virgule du multiplicateur, on a un second produit fictif cent fois plus grand que le premier produit fictif, puisque dans celui-là le même nombre est répété cent fois plus que dans celui-ci. Donc le second produit fictif, c'est-à-dire 22960361, est cent fois mille fois plus grand que le vrai produit. Donc, pour avoir le vrai produit, au lieu de 22960361, il faut écrire 229,60361.

CHAPITRE VI.

De la division des nombres incomplexes.

66. La division est une opération par laquelle on trouve combien de fois un nombre donné, appelé *dividende*, contient un autre nombre donné, appelé *diviseur*, ou quelle partie du dividende est le diviseur : le nombre résultant de l'opération s'appelle *quotient*, du mot latin *quoties*, dénomination qui ne convient proprement qu'au premier cas; nous verrons bientôt en quel sens il faut entendre le mot *quotient*, lorsque ce quotient est une partie du dividende.

On voit par là que la division est une *soustraction réitérée*, comme la multiplication est une addition réitérée. En effet, quand on me propose, par exemple, de diviser 42 par 7, ou de trouver combien de fois 42 contient 7, je puis résoudre la question, en retranchant 7 de 42, autant de fois qu'il peut en être retranché, et comptant le nombre des soustractions, lequel exprimera le quotient cherché. On voit ici l'opération.

	42
	7
1.e soust.	35
	7
2.e soust.	28
	7
3.e soust.	21
	7
4.e soust.	14
	7
5.e soust.	7
	7
6.e soust.	0

Comme le nombre 42 est épuisé après six soustractions consécutives, je conclus que 6 est le quotient cherché.

Mais cette manière de faire la division seroit trop longue dans la pratique, surtout lorsque le dividende est considérable par rapport au diviseur. On a donc cherché l'art d'abréger l'opération; et cet art est l'objet de la division proprement dite.

On indique une division à faire, ou le quotient qui en doit provenir, en écrivant le dividende au dessus d'une petite barre horizontale, et le diviseur au dessous. Par

exemple, $\frac{12}{6}$ indique le quotient de 12 divisé par 6, quotient qui est le nombre 2; de même $\frac{3}{4}$ indique le quotient de 3 divisé par 4, quotient qui n'est alors qu'une partie ou fraction de l'unité principale, comme je l'expliquerai dans le chapitre suivant.

67. Il y a, par rapport à la nature du dividende et du diviseur, deux manières d'envisager la division. 1.° Le dividende et le diviseur peuvent être, ou tous deux abstraits, ou deux concrets de la même espèce : alors le quotient est évidemment un nombre abstrait, qui exprime combien de fois un nombre d'une certaine espèce contient un autre nombre de la même espèce. Par exemple, le quotient du nombre abstrait 56, divisé par le nombre abstrait 8, ou du nombre concret 56 *francs* divisé par le nombre concret 8 *francs*, est le nombre abstrait 7. 2.° Le dividende peut être un nombre concret et le diviseur un nombre abstrait : alors la division est une opération par laquelle on partage le dividende en autant de parties égales (de même nature que lui), qu'il y a d'unités dans le diviseur, pour avoir l'une de ces parties qui est le quotient. Par exemple, si on propose de diviser 40 francs par 10, nombre abstrait, on a pour but de partager 40 francs en dix parties égales, et le quotient 4 francs est une partie du dividende. Mais ces deux sortes de questions se résolvent de la même manière : on fait toujours la division comme si le dividende et le diviseur étoient l'un et l'autre des nombres abstraits ; ensuite on détermine l'espèce des unités du quotient, relativement à celles du dividende, ou au sens dans lequel on a proposé la question qui a donné lieu à la division.

Il est clair que dans tous les cas le produit du diviseur par le quotient, ou du quotient par le diviseur, doit reproduire le dividende exactement, quand le dividende contient un nombre de fois juste le diviseur ; et avec un reste moindre que le diviseur, quand la division ne peut pas se faire exactement : nous indiquerons dans la suite de ces sortes de restes.

68. Les règles nécessaires pour faire toutes sortes de divisions, et que je vais expliquer, supposent qu'on sache auparavant diviser un nombre qui ne contient pas plus de deux chiffres par un autre qui n'en contient qu'un seul. Or, cette première opération est facile, et se fait par le moyen de la Table de Pythagore. Qu'il s'agisse, par exemple, de diviser 72 par 8. On cherchera le dividende 72 dans la table; et prenant le diviseur 8 dans la première case de la bande horizontale qui contient 72, on trouvera le quotient 9 dans la première case de la bande verticale qui contient aussi 72.

Si le dividende ne se trouvoit pas dans la table, comme par exemple, s'il falloit diviser 78 par 8, on prendroit dans la table le nombre 72 qui approche le plus, en dessous, du dividende, et on trouveroit, comme tout à l'heure, que *le quotient* est 9. Mais ce quotient n'est qu'approché, parce que le nombre 78 n'est pas exactement divisible par 8.

Cela posé, nous sommes en état de diviser l'un par l'autre deux nombres exprimés par tant de chiffres qu'on voudra.

69. Problême I. *Diviser un nombre composé de tant de chiffres qu'on voudra, par un autre qui ne contient qu'un seul chiffre.*

Ayant d'abord écrit le dividende, on mettra le diviseur à côté, en les séparant par une accolade. On tirera une barre sous le diviseur, et on écrira sous cette barre les chiffres du quotient à mesure qu'on les trouvera. Or, pour trouver ces chiffres, il faut diviser successivement toutes les parties du dividende par le diviseur, en commençant par *les unités* de la plus haute espèce, c'est-à-dire, en allant de gauche à droite. Si la première division ne se fait pas sans reste, vous convertirez le reste en unités de l'ordre immédiatement inférieur, et vous y joindrez les unités de cet ordre déja contenues dans le dividende total; ce qui vous donnera un second dividende partiel. Vous opérerez sur ce second dividende comme sur le premier; ainsi de

suite jusqu'à ce que le dividende total soit épuisé. Lorsqu'il se trouve quelque dividende qui ne contient pas le diviseur, il faut mettre zéro au quotient. On voit par là que chaque division partielle fournit un chiffre au quotient. Le résultat de tous les quotients partiels forme le quotient total.

70. Exemple I. *Diviser 747 par 3.*

J'écris ces deux nombres comme on le voit ici; et je commence par diviser les 7 centaines du dividende par le diviseur 3, en disant, dans 7 combien de fois 3? Il y est 2 fois, et ce 2 marque des centaines; je l'écris sous la barre. Ensuite je multiplie le diviseur 3 par le quotient 2, et je retranche le produit 6 du premier dividende partiel 7, ce qui me donne 1 centaine pour reste. Je vois par là que les centaines du dividende ne peuvent pas fournir plus de 2 centaines au quotient, et que la centaine de reste doit être convertie en dixaines, lesquelles avec les dixaines qui suivent, formeront un second dividende partiel.

```
Dividende 747 {  3 diviseur.
          6   { 249 quotient.
          --
          14
          12
          --
           27
           27
           --
            0
```

Ainsi, à côté de 1 j'abaisse les dixaines 4 du dividende, et j'ai 14 dixaines à diviser par 3. Je dis donc en 14 combien de fois 3? Il y est 4 fois, et ce 4 marque des dixaines. Je multiplie 3 par 4, et je retranche le produit 12 de 14; j'ai 2 dixaines de reste.

Enfin à côté du 2 j'abaisse les unités 7 du dividende, ce qui me donne 27 unités à diviser par 3; je dis donc en 27 combien de fois 3? Il y est 9 fois; j'écris 9 au quotient, et ce 9 marque des unités. Je multiplie 3 par 9, ce qui donne 27 pour produit; et ce nombre étant retranché du dernier dividende partiel, donne zéro pour reste.

Le quotient total demandé est donc 249.

71. Exemple II. *Diviser 16473 par 7.*

Je dispose le dividende et le diviseur comme dans l'exemple, et comme on le voit ici. Et commençant

l'opération par la dixaine de mille du dividende, je voi d'abord que cette dixaine ne peut pas fournir de dixaines de mille au quotient, 1 n'étant pas divisible par 7. Je la réduis donc en mille, et j'ai 16 mille pour premier dividende partiel. Maintenant, je dis en 16 combien de fois 7? Il y est 2 fois; et ce 2 marque des mille, que j'écris sous la barre. Je multiplie 7 par 2, et je retranche le produit 14 de 16, il me reste 2 mille.

Div. 16473	7 diviseur.	
14	2353 $\frac{2}{7}$ quotient.	
24		
21		
37		
35		
23		
21		

A côté de 2 j'abaisse les centaines 4 du dividende, et le second dividende partiel est 24 centaines. Je dis donc, en 24 combien de fois 7? Il y est 3 fois; et ce 3 marque des centaines que j'écris sous la barre. Je multiplie 7 par 3; je retranche le produit 21 de 24, et il me reste 3 centaines.

A côté de 3 j'abaisse les dixaines 7 du dividende, et le troisième dividende partiel est 37 dixaines. Je dis donc, en 37 combien de fois 7? Il y est 5 fois; j'écris 5 au quotient; je multiplie 7 par 5, et je retranche le produit 35 de 37, ce qui donne 2 dixaines pour reste.

A côté de 2 j'abaisse les unités 3 du dividende, et le quatrième dividende partiel est 23 unités. Je dis donc, en 23 combien de fois 7? Il y est 3 fois; j'écris 3 au quotient; je multiplie 7 par 3, et je retranche le produit 21 de 23; le reste est 2.

On voit donc que le dividende 16473 étant divisé par le diviseur 7, donne 2353 pour quotient, avec un reste 2 qui n'a pas été divisé; en sorte que 2353 n'est le quotient exact que de 16471 divisé par 7. Conformément à la remarque qui termine l'art. 66, la division du reste 2 par 7 s'indique ainsi $\frac{2}{7}$. Nous verrons ci-dessous, en parlant des fractions et des nombres complexes, la signification précise et l'usage de ces sortes d'expressions.

72. Problème II. *Diviser un nombre composé de plusieurs chiffres, par un autre composé aussi de plusieurs chiffres.*

La division se fait comme dans le premier cas, en dé-

composant le dividende en plusieurs dividendes partiels qui se divisent successivement par le diviseur.

73. Exemple. *Diviser* 1116597 *par* 367.

Div. 1116597	367 diviseur.
1101	$3042\frac{183}{367}$ quot.
1559	
1468	
0917	
734	
183	

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, qui forment un nombre assez grand pour contenir le diviseur. Ainsi, j'ai 1116 pour premier dividende partiel, et je cherche combien de fois ce dividende contient le diviseur 367. Or, comme il n'est pas facile de saisir tout d'un coup le rapport des nombres dès qu'ils sont un peu grands; au lieu de dire, dans 1116 combien de fois 367, je comparerai seulement les centaines du dividende avec celles du diviseur, en disant, dans 11 combien de fois 3? Il y est 3 fois. Mais avant que d'écrire ce 3 au quotient, il faut savoir si les dixaines et les unités du dividende 1116 contiennent aussi 3 fois les dixaines et les unités du diviseur 367. J'éclaircis ce doute en multipliant 367 par 3; et comme le produit 1101 est moindre que 1116, je conclus que le dividende 1116 contient 3 fois le diviseur 367. J'écris donc au quotient le chiffre 3 qui marque des mille; ensuite je retranche 1101 de 1116, il reste 15 mille.

A côté de 15 j'abaisse les centaines du dividende, et j'ai 155 centaines pour second dividende partiel. Ce dividende étant moindre que 367, et conséquemment ne pouvant pas être divisé par 367, j'écris 0 au quotient, pour exprimer que le quotient ne contiendra pas des centaines.

A côté de 155 j'abaisse les 9 dixaines du dividende, et j'ai 1559 dixaines pour troisième dividende partiel. Je dis donc, en 1559 combien de fois 367? ou plutôt (en ne comparant, comme on a fait ci-dessus, que les centaines du dividende à celles du diviseur), dans 15 combien de fois 3? Il y est 5 fois; ce qui peut d'abord induire à croire que 5 doit être le troisième chiffre du quotient; mais les dixaines et les unités du dividende 1559 ne contenant pas 5 fois les dixaines et les unités du diviseur 367, j'en conclus qu'au

lieu de mettre 5 au quotient, je ne puis y mettre tout au plus que 4 ; et je serai sûr que c'est en effet le chiffre qui doit y être, si je puis soustraire le produit de 367 par 4 du dividende 1559. Or, je trouve que ce produit est 1468, qui est moindre que 1559 ; j'écris donc 4 au quotient, puis je soustrais 1468 de 1559, restent 91 dixaines.

A côté de 91 j'abaisse les 7 unités du dividende, et j'ai 917 unités pour quatrième et dernier dividende partiel. *Je dis donc*, dans 917 combien de fois 367, ou dans 9 combien de fois 3 ? Je vois par une observation analogue à celle que j'ai faite dans l'opération précédente, qu'on ne peut mettre que 2 au quotient. Je multiplie 367 par 2, et je retranche le produit 734 de 917 ; il reste 183, qui ne peuvent pas se diviser par 367, et dont la division s'indique ainsi $\frac{183}{367}$.

Le nombre 3042 n'est donc le quotient exact que de 1116414 divisé par 367.

74. *Remarque I.* On voit en général que tout l'art de la division des nombres exprimés par plusieurs chiffres consiste à partager le dividende total en plusieurs dividendes particuliers qui soient divisibles par le diviseur. Chaque *dividende partiel* doit donc contenir le diviseur ; mais, pour la facilité et la simplicité de l'opération, ces deux nombres doivent approcher de l'égalité autant qu'il est possible qu'ils en approchent. Ainsi, on examine d'abord si en prenant un dividende partiel qui contienne le même nombre de chiffres que le diviseur, ce dividende est plus grand que le diviseur, ou est tout au moins égal au diviseur : en ce cas la division est possible, et il est clair que le quotient est toujours exprimé par un seul chiffre, autrement le produit du diviseur par le quotient contiendroit plus de chiffres que le dividende et surpasseroit par conséquent le dividende, ce qui ne peut pas être. Mais si le dividende partiel dont on vient de parler se trouve moindre que le diviseur, la division est impossible, et alors il faut prendre pour dividende partiel un nombre qui contienne un chiffre de plus que le diviseur : ce dividende

sera évidemment plus grand que le diviseur ; mais le quotient sera toujours exprimé par un seul chiffre, comme dans le premier cas. En effet, supposons, par exemple, qu'on ait à diviser 599 par 60. On ne peut pas faire la division, sans prendre pour dividende tout le nombre 599; car sa première partie 59 ne contient pas le diviseur 60. Mais, d'un autre côté, le diviseur 60 est le moindre qu'il est possible par rapport au dividende ; car si on avoit pour diviseur le nombre 59 qui est immédiatement au dessous de 60, il suffiroit de prendre pour dividende la partie 59 du nombre proposé 599, ce qui se rapporteroit au premier cas. Or, en divisant 599 par 60, on ne peut pas mettre 10 au quotient, car le produit de 60 par 10 est 600, nombre plus grand que le dividende 599. Même raisonnement pour tout autre cas. Chaque division partielle ne donnant ainsi qu'un seul chiffre au quotient, le quotient total contiendra toujours autant de chiffres qu'on aura fait de divisions partielles.

75. *Remarque II.* La seule difficulté qu'on rencontre dans la pratique de la division est de déterminer chaque quotient partiel. Cette difficulté augmente à mesure que le dividende et le diviseur ont plus de chiffres, et que les chiffres de la gauche du diviseur sont plus petits par rapport aux autres. Le quotient ne se trouve que par une espèce de tâtonnement qui embarrasse pour l'ordinaire les commençants. Ainsi, lorsque nous avons eu ci-dessus à diviser 1116 par 367, nous avons trouvé d'abord, en tâtonnant, 3 pour quotient ; et nous n'avons été certains que c'étoit là en effet le véritable quotient, qu'après avoir trouvé, par la multiplication, que le produit de 367 par 3, ou 1101, étoit contenu dans 1116. En général, on ne peut affirmer qu'un quotient est exact, et on ne doit par conséquent l'écrire, qu'après s'être assuré que le produit du diviseur entier par ce chiffre peut être soustrait du membre de la division sur lequel on opère actuellement. Si ce produit est trop grand, on diminue le chiffre en question d'une unité, et on le soumet à la même épreuve. Si le pro-

duit du diviseur par le nouveau chiffre est encore trop grand, il faudra diminuer ce chiffre encore d'une unité, ainsi de suite.

Ces sortes de tâtonnements sont inévitables : mais voici du moins un moyen d'en diminuer le nombre. Je prends un exemple pour plus de clarté, et je vais expliquer en même temps la manière d'abréger les opérations de la division.

76. Exemple. *Diviser* 9639475 *par* 2789.

Dividende.	9639475	2789 diviseur.
	12724	3456 $\frac{691}{2789}$ quotient.
	15687	
	17425	
reste	691	

Comme les différentes opérations que nous avons ici à faire et à enseigner sont un peu nombreuses et un peu *compliquées*, exposons-les distinctement et par parties.

I.

Le premier membre de notre division est 9639. Je dis donc, en 9639 combien de fois 2789, ou, en ne comparant ensemble que les plus hautes unités, en 9 combien de fois 2? Il y est 4 fois; mais pour savoir si 4 doit être en effet le premier chiffre du quotient, ou s'il n'en faut pas prendre un plus petit, je multiplie le diviseur 2789 par 4; et au lieu de faire cette opération à l'ordinaire, je commence par les unités de la plus haute espèce, et j'essaie de soustraire du dividende le produit à mesure que je le trouve. Tout cela s'exécute sans rien écrire, en disant, 4 fois 2 font 8; 8 ôté de 9 reste 1, qui, joint au second chiffre 6 du dividende, fait 16; 4 fois 7 font 28; mais 28 ne peut être ôté de 16; d'où je conclus que le chiffre 4 est trop grand, et que c'est tout au plus 3 qu'il faut mettre au quotient.

Avant que d'écrire le 3 je le soumets à la même épreuve, en disant 3 fois 2 font 6; 6 ôté de 9 reste 3. Dès qu'on trouve un reste aussi grand ou plus grand que le chiffre qu'on éprouve, c'est une marque sûre que ce chiffre peut

être écrit au quotient. En effet, il est clair (et il en sera de même dans tous les autres cas) que 3639 contient 3 fois le nombre 789 ; car 3 mille valent 30 centaines, qui contiennent 3 fois 9 centaines avec un reste 3 centaines ; ces 3 centaines valent 30 dixaines, qui contiennent 3 fois 9 dixaines avec un reste 3 dixaines ; ces 3 dixaines valent 30 unités, qui contiennent 3 fois 9 unités avec un reste 3 unités ; d'où il résulte qu'à plus forte raison le nombre 3639 contient 3 fois le nombre 789. Je puis donc mettre 3 au quotient.

Maintenant, après nous être ainsi assurés que le quotient 3 n'est pas trop grand, multiplions le diviseur 2789 par le quotient 3, à l'ordinaire, c'est-à-dire, en allant de droite à gauche, et soustrayons le produit du dividende 9639. Ces deux opérations peuvent se faire tout à la fois, et cela abrège extrêmement le calcul de la division.

Je dis donc 3 fois 9 font 27 ; mais 27 ne peut être ôté de 9 ; ainsi je suppose que 9 est augmenté de 2 dixaines, ce qui me donne 29, dont retranchant 27, il reste 2 que j'écris sous le 9.

Les deux dixaines dont le 9 a été augmenté sont censées avoir été empruntées sur les 3 dixaines du dividende 9639. Ainsi, en passant à la multiplication et à la soustraction suivantes, il faut ne compter le 3 que pour 1, ou, ce qui est plus commode dans la pratique et revient au même, il faut retenir 2 dixaines pour les joindre au produit des dixaines du diviseur par le quotient, et soustraire le tout des dixaines du dividende prises en leur totalité. Je poursuis donc, et je dis, 3 fois 8 font 24 et 2 de retenus font 26 ; or, 26 ne pouvant être ôté de 3, j'augmente 3 de 3 centaines, ce qui me donne 33, dont retranchant 26, reste 7 que j'écris sous le 3.

Je retiens 3 centaines pour les joindre aux centaines du troisième produit, qui doivent être soustraites des centaines du dividende. Ainsi je dis, 3 fois 7 font 21 et 3 de retenus font 24 ; 24 ne peut être ôté de 6 ; j'augmente donc 6 de 2 mille, ce qui donne 26, dont je retranche 24 ; il reste 2 que j'écris sous le 6.

Enfin je multiplie le chiffre 2 du diviseur par 3 ; le produit est 6, auquel ajoutant 2 à raison de l'emprunt supposé pour la soustraction précédente, la somme est 8, qui, étant retranchée de 9, donne 1 pour reste.

Toutes ces opérations font voir qu'après avoir retranché du dividende 9539 le produit du diviseur 2789 par 3, le reste est 1272 mille.

II.

A côté de ce reste j'abaisse les 4 centaines du dividende, et j'ai 12724 pour second dividende partiel. Je dis, en 12 combien de fois 2? Il y est 6 fois ; mais on voit tout de suite que ce chiffre 6 est trop grand pour le quotient, puisque les 724 unités du dividende partiel, loin de contenir 6 fois ne contiennent pas même 1 fois les 789 unités du diviseur. Ainsi il faut éprouver le nombre 5, en disant, *5 fois 2 font* 10, 10 ôté de 12 il reste 2, qui avec le 7 suivant du dividende partiel font 27 ; 5 fois 7 font 35 ; mais 35 ne pouvant être ôté de 27, le 5 est encore trop grand. On éprouvera donc le nombre 4, en disant, 4 fois 2 font 8 ; 8 ôté de 12 il reste 4. Comme ce reste est aussi grand que le quotient 4, je conclus, par une observation semblable à celle que nous avons déja faite ci-dessus, que le chiffre 4 est bon et doit être mis au quotient. Cela posé, on multipliera à l'ordinaire 2789 par 4, et on soustraira en même temps le produit de 12724 comme dans l'opération précédente ; on trouvera 1568 centaines pour reste.

III.

A côté de ce reste mettez le chiffre 7 des dixaines du dividende, vous aurez le troisième dividende partiel, 15687 dixaines. Pour trouver le troisième chiffre du quotient, vous direz, en 15 combien de fois 2? Il y est 7 fois ; mais en essayant ce chiffre 7 vous le trouverez trop grand pour être le quotient ; le chiffre 6 est encore trop grand ; mais le chiffre 5 est bon, et vous le mettrez au quotient. Faisant ensuite le produit de 2789 par 5, vous le retrancherez en même temps du dividende 15687, et vous aurez 1742 dixaines de reste.

IV.

Enfin, à côté de ce reste placez le chiffre 5 des unités du dividende, vous aurez le quatrième et dernier dividende partiel, 17425 unités. Vous direz donc, en 17 combien de fois 2? Il y est 8 fois; mais par l'épreuve vous trouverez que le 8 et le 7 sont trop grands, et vous ne mettrez que 6 au quotient. Ayant retranché de 17425 le produit du diviseur 2789 par 6, vous aurez 691 pour dernier reste.

77. *Remarque III.* Il y a des cas où la division s'abrège naturellement par elle-même. Par exemple, qu'on ait à diviser un nombre quelconque par un autre qui ne contient que l'unité suivie de plusieurs zéros; la division se fait tout d'un coup, en séparant vers la droite, par une virgule, autant de chiffres dans le dividende qu'il y a de zéros dans le diviseur. Ainsi, s'il est question de diviser 43458 par 1000, je séparerai dans le dividende 43458 les trois derniers chiffres vers la droite, et j'aurai 43,458 pour le quotient cherché. Car diviser 43458 par 1000, c'est chercher un nombre 1000 fois plus petit que 43458. Or (20) on rend le nombre 43458 mille fois plus petit, en y séparant trois chiffres vers la droite par la virgule décimale.

78. *Remarque IV.* Lorsque le dividende et le diviseur finissent l'un et l'autre par des zéros, on pourra supprimer dans les deux le même nombre de zéros, et faire la division sur ces deux nouveaux nombres; le quotient sera toujours le même : car, par la suppression des zéros, on rend tout à la fois le dividende et le diviseur 10 fois, 100 fois, 1000 fois, etc. plus petits; d'où il s'ensuit évidemment que le nouveau dividende contient le nouveau diviseur autant de fois que le premier dividende contenoit le premier diviseur. Par exemple, qu'il s'agisse de diviser 45000 par 1500; je supprime deux zéros dans le dividende et dans le diviseur, c'est-à-dire, je les divise l'un et l'autre par 100. Alors l'opération se réduit à diviser 450 par 15, ce qui donne 30 pour le quotient cherché.

79. *Scholie.* Il arrive rarement que le dividende contienne un nombre de fois juste le diviseur : alors le quotient qu'on trouve par les méthodes précédentes ne fait qu'approcher du véritable quotient, dont il ne diffère pas néanmoins d'une unité principale ; mais on peut avoir besoin d'approcher davantage du véritable quotient, lorsqu'on ne peut l'obtenir en toute rigueur. Les parties décimales servent à cet objet : elles font trouver un quotient qui ne diffère pas du véritable, d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra. Elles servent de même à trouver des quantités approchées pour toutes sortes de dividendes et de diviseurs, qui contiennent ou non des parties décimales, séparément ou conjointement. Toutes ces opérations vont être détaillées dans les problèmes suivants, qui complèteront la théorie de la division.

80. Problème III. *Le dividende et le diviseur ne contenant d'abord l'un et l'autre que des unités principales, et le premier nombre étant supposé n'être pas exactement divisible par le second, déterminer un quotient qui approche du vrai quotient à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.*

Après avoir trouvé les unités principales du quotient, comme il a été expliqué, placez à la droite du reste une virgule, et écrivez à la suite autant de zéros que vous voudrez avoir de chiffres décimaux au quotient. Cette opération ne change point (21) la valeur du reste dont il s'agit. Ensuite continuez la division comme si la virgule n'existoit pas ; et quand vous aurez épuisé le nouveau dividende, séparez vers la droite du quotient, par une virgule, autant de chiffres décimaux que vous avez mis de zéros à la suite du reste de la division des unités principales.

81. Exemple. *Diviser* 47 *par* 7.

Div. 47	7 diviseur.
5,000	6,714 quotient.
10	
30	
2	

On trouvera d'abord 6 pour quotient, et 5 pour reste. Le quotient ne peut pas contenir plus de 6 unités principales, mais il peut avoir encore des parties décimales. Je suppose

qu'on veuille qu'il contienne des millièmes. Je mettrai après le reste 5 une virgule, et à la suite de cette virgule trois zéros; ce qui convertira le nombre 5 en 5,000, c'est-à-dire en *cinq mille millièmes*, et n'en changera pas la valeur (21). Cela posé, je continuerai la division sans faire d'abord attention à la virgule, c'est-à-dire, comme s'il falloit diviser 5000 par 7. Cette division, faite à l'ordinaire par parties, donne 714 pour quotient. Ces trois chiffres, écrits à la suite du premier 6, forment le nombre 6714. Or, ce nombre est 1000 fois plus grand que le quotient de 47 divisé par 7, car il est évident que, pour trouver le nombre 6714, j'ai opéré comme s'il avoit été question de diviser 47000 par 7, c'est-à-dire de diviser un dividende mille fois plus grand que le véritable, par le diviseur 7; ce qui donne évidemment un quotient 1000 fois plus grand que le véritable. Donc, pour avoir ce dernier quotient, il faudra rendre le nombre 6714 mille fois plus petit; c'est ce qu'on obtiendra (20), en y séparant trois chiffres vers la droite par une virgule, c'est-à-dire en écrivant 6,714.

Ce quotient 6,714 n'est pas rigoureusement exact, puisqu'il y a eu un reste 2 dans la dernière division partielle; mais il ne diffère pas d'un *millième* du quotient rigoureux; car, à la place du dernier chiffre 4 du quotient, on n'auroit pas pu mettre 5 sans rendre ce quotient trop grand.

82. Problême IV. *Diviser un nombre qui contient des parties décimales, par un nombre qui n'en contient point.*

Supprimez la virgule du dividende, et faites la division à l'ordinaire : le quotient étant trouvé, séparez-y vers la droite, par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en avoit dans le dividende : vous aurez d'abord par là, ou un quotient exact, ou un quotient qui ne différera pas du véritable d'une unité décimale du même ordre que la plus basse unité décimale du dividende. En effet, par la suppression de la virgule du dividende, vous avez rendu ce nombre, ou dix fois plus grand, ou cent fois plus grand, ou mille fois plus grand, etc.; d'où il résulte évidemment que le nouveau dividende contient, ou dix fois

plus, ou cent fois plus, ou mille fois plus, etc., le diviseur demeuré constant. Ainsi pour rappeler le quotient à sa valeur, il faut y séparer vers la droite, par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le dividende proposé.

Lorsque la division ne se fait pas exactement, et qu'on veut approcher davantage du véritable quotient, il faut écrire à la suite du reste autant de zéros qu'on veut avoir de nouveaux chiffres décimaux au quotient, et continuer l'opération de la même manière.

83. Exemple. *Diviser* 79,59 *par* 24.

Je fais l'opération comme s'il s'agissoit de diviser 7959 par 24; le quotient est 331 avec le reste 15. Séparant deux chiffres décimaux vers la droite (parce qu'il y a deux chiffres décimaux au dividende proposé) j'ai 3,31, qui ne diffère pas du véritable quotient d'un centième.

Div.	79,59	24 diviseur.
	72	3,3162 quot.
	7,5	
	7,2	
	39	
	150	
	144	
	60	
	48	
	12	

Si, maintenant, on veut avoir un *quotient* qui ne diffère pas du véritable quotient d'un dix millième, il faudra écrire deux zéros à la droite du reste 15; et en continuant la division, on trouvera les deux nouveaux chiffres décimaux 62; de sorte que le quotient total est 3,3162, qui ne diffère pas du vrai quotient d'un dix millième.

84. Problème V. *Diviser un nombre qui contient ou ne contient pas des parties décimales, par un nombre qui en contient.*

1.° *Si le* dividende et le diviseur contiennent le même nombre de chiffres décimaux, on supprimera la virgule de l'un et l'autre; et la question sera de diviser un nombre qui ne contient point de parties décimales, par un autre nombre qui n'en contient point, ce qui la rappelle au problème III. En effet, par la suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur, on les rend l'un et

l'autre, ou dix fois plus grands, ou cent fois plus grands, ou mille fois plus grands, etc. D'où il suit que le nouveau dividende contient autant de fois le nouveau diviseur que le dividende primitif contient de fois le diviseur primitif.

2.° Si le dividende contient plus de chiffres décimaux que le diviseur, avancez la virgule du dividende d'autant de places vers la droite, qu'il y a de chiffres décimaux dans le diviseur, et supprimez la virgule du diviseur. Par là vous rappellerez la question au problême IV; car par cette double opération vous rendez le dividende et le diviseur l'un et l'autre, ou dix fois plus grands, ou cent fois plus grands, ou mille fois plus grands, etc.; ce qui ne change point la valeur du quotient.

3.° Si le dividende ne contient point de chiffres décimaux, ou s'il en contient moins que le diviseur, suppléez à ce *défaut* par des zéros; ensuite supprimez la virgule du dividende et du diviseur; ce qui ne change point la valeur du quotient, et ce qui rappelle la question au probl. III.

85. Exemple I. *Diviser* 349,78 *par* 5,43.

Le dividende et le diviseur contenant le même nombre de chiffres décimaux, je supprime les deux virgules; et la question est de diviser 34978 par 543. Le quotient est 64 unités principales, et 226 unités principales de reste. Si on veut avoir le quotient à moins d'un millième, on écrira trois zéros à côté du reste, et on continuera la division; on trouvera finalement le quotient 64,416 qui ne diffère pas du véritable quotient d'un millième.

86. Exemple II. *Diviser* 78,3478 *par* 24,37.

Le dividende contenant quatre chiffres décimaux, tandis que le diviseur n'en contient que deux, j'avance la virgule dans le dividende, de deux rangs vers la droite, et je supprime la virgule dans le diviseur; ce qui me donne 7834,78 à diviser par 2437. Le quotient est 3,21 et le reste 12,01. Si on veut avoir un quotient qui ne diffère pas du véritable d'un dix-millième, on écrira deux zéros à la suite du reste, et on continuera la division; on aura finalement le quotient total cherché 3,2149.

87. Exemple III. *Diviser 78,3 par 2,534.*

Le dividende ne contenant qu'un seul chiffre décimal, tandis que le diviseur en contient trois, j'écris deux zéros à la suite du dividende; ce qui me donne 78,300 à diviser par 2,534. Je supprime les deux virgules, et la question est de diviser 78300 par 2534: le quotient est 30 unités principales, et le reste est 2280 des mêmes unités. Si on veut pousser le quotient jusques aux millièmes, on écrira trois zéros à la suite du reste, et on continuera la division; ce qui donnera finalement pour le quotient cherché 30,899.

88. Problême VI. *Diviser un nombre par un autre nombre plus grand que lui, et trouver un quotient qui ne diffère pas de la vraie partie que le dividende est du diviseur, d'une unité décimale d'un ordre donné.*

1.° *Si les* deux nombres ne contiennent ni l'un ni l'autre des parties décimales, écrivez à la suite du dividende autant de zéros que vous voulez avoir de chiffres décimaux au quotient; faites ensuite la division à l'ordinaire; et quand le quotient sera trouvé, séparez-y vers la droite, par une virgule, autant de chiffres décimaux que vous avez écrit de zéros après le dividende proposé.

2.° *Si le di*vidende et le diviseur contiennent tous deux, ou si l'un seulement contient des parties décimales, vous préparerez ces nombres (au moyen des zéros qu'il est permis d'écrire après la virgule décimale), de manière qu'on puisse supprimer la virgule décimale du diviseur, s'il y en a une; ensuite vous écrirez après le dividende actuel un nombre de zéros, tel qu'il en résulte au quotient le nombre de chiffres décimaux qu'on desire.

89. Exemple I. *Diviser 5 par 67, de manière que le quotient ne diffère pas du véritable quotient, d'un dix millième.*

A la place de 5 écrivez 5,0000, et faites la division comme si le dividende étoit 5000; vous trouverez pour quotient 746. Mais ce quotient est 10000 fois trop grand; vous aurez donc le quotient cherché, en écrivant 0,0746. On voit que le quotient ne contient, ni unités principales,

ni dixièmes. Il ne diffère pas du quotient rigoureux, d'un *dix millième*; car à la place du dernier chiffre 6, on n'auroit pas pu écrire 7, sans rendre le quotient trop grand.

90. Exemple II. *Diviser* 5,4 *par* 67,54.

Le dividende est plus petit que le diviseur, mais le premier nombre ne contient qu'un chiffre décimal, tandis que le second en contient deux. Au lieu du dividende 5,4, j'écris 5,40, ce qui n'en change pas la valeur. On a donc 5,40 à diviser par 67,54. Supprimant la virgule des deux nombres, le quotient ne change point de valeur, et il ne s'agira plus que de diviser 540 par 6754; ce qui revient au premier cas.

Si on veut avoir un quotient qui ne diffère pas du quotient rigoureux, d'un millième, on écrira trois zéros à la suite du dividende 540; ce qui donnera 540,000 à diviser par 6754. Supprimant la virgule, et faisant la division, on trouvera 79 pour quotient. Mais ce quotient est 1000 fois trop grand, puisqu'on a rendu, par la suppression de la virgule, le dividende 1000 fois trop grand. Donc le quotient cherché est 0,079.

91. Exemple III. *Diviser* 5,37894 *par* 67,54.

Le dividende, qui est toujours plus petit que le diviseur, contenant ici cinq chiffres décimaux, tandis que le dernier n'en contient que deux, j'avance la virgule décimale dans le dividende, de deux rangs vers la droite; et je supprime la virgule du diviseur. Alors il s'agit de diviser 537,894 par 6754: le quotient est 0,079, à moins d'un millième. On poussera la division plus loin, si l'on veut avoir un quotient qui approche davantage du vrai quotient.

Preuve de la multiplication et de la division.

92. La multiplication et la division peuvent servir à se vérifier mutuellement.

Puisque dans la division le produit du diviseur par le quotient doit donner un produit égal au dividende, il est évident que si, après avoir fait une multiplication, on regarde le produit comme le dividende d'une division,

et qu'on divise ce nombre par le multiplicande, on doit trouver pour quotient le multiplicateur, ou que si l'on divise par le multiplicateur, on doit avoir pour quotient le multiplicande. Si cette condition n'est pas remplie, c'est un signe que la multiplication a été mal faite, et il faut la recommencer.

Réciproquement la multiplication peut servir à vérifier la division. Car si la division a été faite sans reste, il faut que le produit du diviseur par le quotient redonne le dividende ; et si la division n'a pas été faite sans reste, il faut qu'après avoir ôté le reste du dividende, la partie restante de ce dividende soit égale au produit du diviseur par le quotient. Sinon, la division aura été mal faite.

Autre preuve, nommée la preuve par 9.

93. Un exemple suffira pour faire entendre en général la pratique et la théorie de cette nouvelle preuve.

Supposons qu'ayant multiplié 748456 par 368, vous ayez trouvé pour produit 275431808, et que vous veuillez savoir si ce produit est juste : vous ajouterez pour cela tous les chiffres 7, 4, 8, 4, 5, 6, du multiplicande comme si chacun d'eux représentoit des unités simples, et vous rejeterez les 9 à mesure qu'il y en aura dans la somme ; cette opération vous donnera le reste 7 : semblablement, vous ajouterez les chiffres 3, 6, 8 du multiplicateur, et vous rejeterez les 9 ; ce qui vous donnera le reste 8 ; ensuite vous multiplierez le premier reste 7 par le second 8 ; ce qui vous donnera le produit 56 ; vous ajouterez les deux chiffres 5 et 6 dont il est composé et vous rejeterez 9 de la somme ; il vous restera 2.

Maintenant, si, en opérant de la même manière sur le produit 275431808, vous trouvez également 2 pour reste (comme on le trouve en effet ici), vous conclurez *très-probablement* que votre multiplication a été bien faite.

On voit que la même preuve s'applique à la division, en considérant le dividende (déduction faite du reste de la division, s'il y en a un), le diviseur et le quotient,

comme le produit, le multiplicande et le multiplicateur d'une multiplication.

Cette règle est fondée sur les considérations suivantes.

Si l'on retranche tous les 9 contenus dans un nombre exprimé par un chiffre significatif suivi d'un nombre quelconque de zéros, le reste sera exprimé par un chiffre égal au chiffre significatif de ce nombre. Par exemple, si du nombre 70, on ôte tous les 9 qu'il contient, on aura le reste 7; si du nombre 600, on ôte tous les 9, on aura le reste 6; si du nombre 8000, on ôte tous les 9, on aura le reste 8; ainsi des autres. Par conséquent notre multiplicande 748456, étant la même chose que 700000+40000+8000+400+50+6, il s'ensuit qu'en rejetant de chacune de ses parties tous les 9 qu'elle contient, on aura le reste 7+4+8+4+5+6; lequel donne, en effectuant les additions indiquées et rejetant tous les 9, le reste 7. Semblablement, le multiplicateur 368 donne le reste 8. Donc, si vous avez à multiplier ensemble les deux facteurs 748456 et 368, et que vous veuillez rejeter tous les 9 du produit, sans effectuer ce produit, vous n'aurez qu'à rejeter tous les 9 des facteurs, puisque la multiplication de ces 9 par un nombre quelconque ne donneroit que des 9. Alors vous aurez simplement 7 à multiplier par 8; ce qui donne le produit 56; donc en ajoutant ces deux chiffres 5 et 6, et ôtant 9 de la somme, on aura le reste 2. Ce reste doit donc être égal au reste que l'on trouve en ajoutant les chiffres du produit 275431808, et rejetant les 9, supposé qu'en effet ce produit soit véritablement celui qui résulte de la multiplication de 748456 par 368.

J'ai employé ci-dessus l'expression *très-probablement*, parce que la règle proposée n'est pas infaillible; car, si par exemple, dans le produit 275431808; on avoit interverti l'ordre de quelques chiffres, comme si on avoit écrit 275431088; si, pour le zéro on avoit mis un 9, ou qu'on eût écrit pour produit 275431988, etc.: il est évident que la règle induiroit en erreur. Mais, comme il est probable qu'en opérant avec un peu d'attention on ne commettra pas des fautes de cette nature, on ne doit pas tout à fait renoncer

à l'usage de cette règle qui est très-commode dans la pratique. On voit qu'elle a toujours lieu, lorsque la multiplication est juste; mais on ne doit pas conclure que réciproquement la multiplication est juste, lorsque la règle a lieu.

CHAPITRE VII.

Des Fractions.

94. On appelle *unité fractionnaire* une partie de l'unité principale supposée partagée en plusieurs parties égales; et *fraction* ou *nombre fractionnaire*, *nombre rompu*, la collection de plusieurs de ces parties. Par exemple, que l'unité principale soit divisée en quatre parties égales, et qu'on en prenne trois, on formera la fraction *trois quarts*, qui a pour unité *un quart* de l'unité principale. Il est clair que l'unité fractionnaire est, à l'égard des fractions qui en dérivent, ce que l'unité principale est à l'égard des nombres qu'elle produit, en s'ajoutant continuellement à elle-même.

Quelquefois on appelle simplement *fraction* l'unité fractionnaire.

95. Pour exprimer une fraction, on emploie deux nombres; l'un qui marque en combien de parties égales l'unité principale est divisée, et qu'on appelle *dénominateur*; l'autre qui marque combien on prend de ces parties, et qu'on appelle *numérateur*. On distingue ces deux nombres l'un de l'autre, en les séparant par une petite barre horizontale : le numérateur s'écrit au dessus de cette barre, le dénominateur au dessous. Ainsi, pour exprimer la fraction *trois quarts*, on écrit $\frac{3}{4}$. Pour exprimer la fraction *cinq huitièmes*, qui marque que l'unité principale est partagée en huit parties égales, et qu'on en prend cinq, on écrit $\frac{5}{8}$. Ainsi des autres.

Le numérateur et le dénominateur s'appellent les *termes* de la fraction.

96. Une fraction est *concrète* ou *abstraite*, selon que l'unité principale, dont elle fait partie, est *concrète* ou *abstraite*.

97. Toute fraction peut être considérée comme le quotient de son numérateur divisé par son dénominateur. Par exemple, la fraction $\frac{5}{8}$ n'est autre chose que le quotient de 5 divisé par 8; car diviser 5 par 8, c'est prendre la huitième partie du *tout* représenté par 5, ou partager ce même tout en huit parties égales. Or, il est visible que chacune des unités du nombre 5 produira une de ces nouvelles parties. Donc les 5 unités du même nombre produiront 5 nouvelles parties, c'est-à-dire *cinq huitièmes parties* de l'unité principale, ou la fraction $\frac{5}{8}$.

98. Puisque le numérateur d'une fraction exprime le nombre de ses unités, il est clair que si, sans toucher au dénominateur, on rend le numérateur un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, c'est-à-dire, si on le multiplie ou si on le divise par un certain nombre; il est clair, dis-je, que la nouvelle fraction sera égale au produit de la première multipliée ou divisée par le nombre qui a multiplié ou divisé le numérateur. Par exemple, soit la fraction $\frac{6}{13}$: si, sans toucher à son dénominateur 13, l'on multiplie ou l'on divise son numérateur 6 par 2, on formera, ou la fraction $\frac{12}{13}$ qui est égale au produit de $\frac{6}{13}$ par 2, ou la fraction $\frac{3}{13}$ qui est égale au quotient de la fraction $\frac{6}{13}$ divisée par 2.

99. Si, au contraire, sans toucher au numérateur d'une fraction, l'on multiplie ou l'on divise son dénominateur par un certain nombre, la nouvelle fraction sera égale à la première divisée ou multipliée par le nombre qui a multiplié ou divisé le dénominateur; car le dénominateur exprime en combien de parties égales l'unité principale est partagée; et par conséquent le nombre de ces parties demeurant le même, la fraction est d'autant plus petite ou plus grande que le dénominateur est plus grand ou plus petit. Soit, par exemple, la fraction $\frac{1}{12}$: si, sans

toucher au numérateur, l'on multiplie ou l'on divise le dénominateur 12 par 3, on formera, ou la fraction $\frac{1}{36}$ qui est égale au quotient de la fraction $\frac{1}{12}$ divisée par 3, ou la fraction $\frac{1}{4}$ qui est égale au produit de la fraction $\frac{1}{12}$ multipliée par 3.

100. Il suit des deux cas qu'on ne change point la valeur d'une fraction, en multipliant tout à la fois, ou en divisant tout à la fois, son numérateur et son dénominateur par un même nombre. Par exemple, si on a la fraction $\frac{1}{4}$, et qu'on multiplie son numérateur et son dénominateur par le même nombre 2, on formera la nouvelle fraction $\frac{2}{8}$ qui a même valeur que la première. De même, si on a la fraction $\frac{8}{24}$, et qu'on divise son numérateur et son dénominateur par le même nombre 8, on aura la nouvelle fraction $\frac{1}{3}$ qui est de même valeur que $\frac{8}{24}$.

101. Lorsque le numérateur d'une fraction est égal à son dénominateur, la fraction vaut 1. Ainsi, les fractions $\frac{8}{8}$, $\frac{7}{7}$, valent chacune 1, puisque le quotient de tout nombre divisé par lui-même est nécessairement 1.

102. Si le numérateur d'une fraction est plus grand que son dénominateur, cette fraction vaut plus de 1, et contient une ou plusieurs unités principales. Pour déterminer ces unités, il faut diviser le numérateur par le dénominateur. Soit, par exemple, la fraction $\frac{58}{9}$. Je divise 58 par 9, et j'ai 6 pour quotient et 4 pour reste. Ce reste doit être aussi divisé par 9, ou partagé en 9 nouvelles parties, et le quotient est la fraction $\frac{4}{9}$. La fraction primitive $\frac{58}{9}$ vaut donc 6 $\frac{4}{9}$, c'es-à-dire, 6 unités principales plus la fraction $\frac{4}{9}$.

103. Tout nombre entier peut être réduit en une fraction qui ait tel dénominateur qu'on voudra, et cela en multipliant ce nombre par le dénominateur qu'on veut avoir. Par exemple, le nombre 3 est la même chose que la fraction $\frac{3}{1}$ qui a 1 pour dénominateur, ou que la fraction $\frac{6}{2}$ qui a 2 pour dénominateur, et pour numérateur le produit de 3 par 2; ou que la fraction $\frac{9}{3}$ qui a 3 pour dé-

nominateur, et pour numérateur le produit de 3 par 3, etc.; car, dans tous les cas, en divisant le numérateur par le dénominateur, on trouvera le nombre 3.

104. *Scholie.* La fonction du numérateur d'une fraction est simplement d'indiquer le nombre des unités fractionnaires dont elle est composée; mais l'espèce ou la grandeur de ces unités, par rapport à l'unité principale, dépend du dénominateur. C'est donc ce dernier nombre qui caractérise la nature d'une fraction. Ainsi, lorsqu'on voudra combiner ensemble plusieurs fractions, pour savoir quelle est la plus grande, ou pour les ajouter, ou pour soustraire les unes des autres, il faudra commencer par les réduire au même dénominateur, afin qu'ayant par ce moyen des unités de même espèce, l'usage qu'on en veut faire ne dépende plus que de leurs numérateurs.

105. Problème I. *Réduire plusieurs fractions au même dénominateur.*

Multipliez le numérateur et le dénominateur de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres : vous formerez ainsi de nouvelles fractions (qu'on peut appeler *fractions composées*) qui auront pour dénominateur commun le produit de tous les dénominateurs, et qui auront mêmes valeurs que les fractions primitives (100), puisque le numérateur et le dénominateur de chacune de celles-ci auront été multipliés par un même nombre. Soient, par exemple, les deux fractions $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{7}$ qu'il s'agit de réduire au même dénominateur. Je multiplie les deux termes de la première par 7, et les deux termes de la seconde par 6; ce qui me donne les deux fractions composées $\frac{35}{42}$ et $\frac{18}{42}$, qui ont le même dénominateur, et mêmes valeurs que les deux fractions primitives. Qu'on ait les trois fractions $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, à réduire au même dénominateur : on multipliera les deux termes de la première par 24, produit des deux derniers dénominateurs; les deux termes de la seconde par 56, produit du premier et du troisième dénominateurs; les deux termes de la troisième par 21, produit des deux premiers dénomina-

teurs. Ces opérations donneront les trois fractions composées $\frac{144}{168}$, $\frac{112}{168}$, $\frac{105}{168}$, qui ont le même dénominateur, et mêmes valeurs que les fractions primitives $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$.

106. *Corollaire.* Deux fractions étant réduites au même dénominateur, il est évident que la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur. Or, comme le numérateur de la première fraction composée est le produit du numérateur de la première fraction simple par le dénominateur de la seconde fraction simple, et que le numérateur de la seconde fraction composée est le produit du numérateur de la seconde fraction simple par le dénominateur de la première fraction simple, concluons que *de deux fractions qui ont des dénominateurs différents, la plus grande est celle dont le numérateur multiplié par le dénominateur de l'autre donne un produit plus grand que celui du numérateur de cette dernière fraction par le dénominateur de la première.* Par exemple, je vois que des deux fractions $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{4}$, la première est plus grande que la seconde, parce que le produit de 6 par 4, c'est-à-dire 24, est plus grand que le produit de 3 par 7, c'est-à-dire 21. Des deux fractions $\frac{9}{13}$, $\frac{5}{6}$, la seconde est plus grande que la première, parce que le produit de 5 par 13, c'est-à-dire 65, est plus grand que le produit de 9 par 6, c'est-à-dire 54.

107. Problème II. *Additionner ensemble plusieurs fractions.*

On ne peut ajouter ensemble que des nombres de même espèce; et comme l'espèce d'une fraction dépend, ainsi que nous l'avons déja remarqué, de son dénominateur, si les fractions qu'on propose d'ajouter ensemble n'ont pas le même dénominateur, on les réduira d'abord au même dénominateur. Cela posé, on ajoutera ensemble tous les numérateurs, et à la somme on appliquera le dénominateur commun. La raison en est claire; car les numérateurs marquent les nombres d'unités, et la somme doit contenir des unités de même espèce que celles des parties dont elle est composée. Ainsi, par exemple, la somme des deux fractions $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{7}$ est $\frac{5}{7}$. Qu'on propose

d'ajouter ensemble les trois fractions $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$; ces fractions étant réduites d'abord au même dénominateur, et devenant ainsi $\frac{144}{168}$, $\frac{112}{168}$, $\frac{105}{168}$, on ajoutera ensemble les trois numérateurs, et on trouvera la somme 361, sous laquelle on écrira le dénominateur commun 168. Par ce moyen, on aura $\frac{361}{168}$ pour la somme des trois fractions proposées.

108. *Remarque.* Quand, après avoir ajouté ensemble plusieurs fractions, le numérateur de la somme est plus grand que le dénominateur, comme dans le dernier exemple, cette somme contient une ou plusieurs unités principales ou entières, qu'on détermine (102) en divisant le numérateur par le dénominateur. Ainsi, dans la fraction $\frac{361}{168}$, divisant le numérateur par le dénominateur, on trouvera que cette fraction vaut $2\frac{25}{168}$, c'est-à-dire 2 entiers plus la fraction $\frac{25}{168}$.

109. Problême III. *Soustraire une fraction d'une autre.*

Les deux fractions doivent être de même espèce, et avoir par conséquent le même dénominateur. Ainsi si, dans l'état où on les propose, elles n'avoient pas le même dénominateur, on commenceroit par les réduire au même dénominateur. Cela posé, retranchez le plus petit numérateur du plus grand, et appliquez au reste le dénominateur commun : la fraction que vous formerez ainsi sera la différence des deux fractions proposées. Par exemple, pour retrancher de la fraction $\frac{7}{9}$ la fraction $\frac{5}{9}$, je retranche 5 de 7, et j'ai pour le reste le nombre 2 sous lequel j'écris le dénominateur 9 ; je forme ainsi la fraction $\frac{2}{9}$, qui est la différence des deux fractions $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{9}$. Si de la fraction $\frac{5}{6}$ il falloit retrancher la fraction $\frac{8}{15}$, je réduirois les deux fractions au même dénominateur, et j'aurois $\frac{75}{90}$, $\frac{48}{90}$, dont la différence est $\frac{27}{90}$.

110. Problême IV. *Multiplier un nombre quelconque, entier ou rompu, par une fraction.*

La multiplication par une fraction n'est pas une opération simple comme pour les nombres entiers ; elle renferme réellement deux opérations, savoir, une mul-

tiplication par le numérateur de la fraction, ét une division par son dénominateur. En effet, soit, par exemple, le nombre quelconque A à multiplier par la fraction $\frac{3}{4}$. En multipliant le nombre A par le numérateur 3, on a un produit quatre fois trop grand, puisqu'on ne doit multiplier que par le quart de trois. Ainsi, pour réduire ce produit à sa juste valeur, il faut en prendre le quart, c'est-à-dire le diviser par 4. Le même raisonnement s'applique à tous les autres cas, et nous pouvons conclure en général que pour multiplier un nombre donné par une fraction, il faut multiplier d'abord ce nombre par le numérateur de la fraction, et diviser le produit par le dénominateur de la même fraction.

Cela posé, soit, 1.° le multiplicande un nombre entier. Alors multipliez cet entier par le numérateur de la fraction multiplicateur, et appliquez au produit le dénominateur de la même fraction. Ainsi, qu'on ait à multiplier le nombre 8 par la fraction $\frac{2}{9}$, on multipliera 8 par 7, et on formera la fraction produit $\frac{56}{9}$; cette fraction vaut $6\frac{2}{9}$.

2.° Soit le multiplicande une fraction. Je multiplie les deux numérateurs l'un par l'autre, et les deux dénominateurs aussi l'un par l'autre ; je forme ensuite une fraction qui ait pour numérateur le premier produit et pour dénominateur le second ; elle sera le produit des deux fractions proposées. Ainsi, qu'on ait à multiplier la fraction $\frac{6}{9}$ par la fraction $\frac{3}{8}$; je multiplie 6 par 3, le produit est 18 ; je multiplie 7 par 8, le produit est 56. Avec ces deux produits je forme la fraction $\frac{18}{56}$, qui est le produit des deux fractions données. Car, en multipliant le numérateur de la fraction $\frac{6}{7}$ par 3, on multiplie (98) cette fraction par 3; et en multipliant son dénominateur 7 par 8, on divise (99) cette fraction par 8. Donc, par les deux opérations, la fraction $\frac{6}{7}$ est multipliée par le numérateur de la fraction multiplicateur, et divisée par le dénominateur de la même fraction, ce qui est conforme à la règle prescrite.

111. Problême V. *Diviser un nombre quelconque entier ou rompu par une fraction.*

Diviser un nombre quelconque A par une fraction est encore une opération composée, qui consiste à diviser ce nombre par le numérateur et à le multiplier par le dénominateur de la fraction. Que la fraction soit, par exemple, $\frac{3}{4}$. En divisant le nombre A par 3 on a un quotient quatre fois plus petit, puisqu'on ne doit diviser que par le quart de 3. Ainsi, pour réduire ce quotient à sa juste valeur, il faut le multiplier par 4. La question est donc la même que s'il s'agissoit de multiplier le nombre A par la fraction $\frac{4}{3}$.

On voit par là que la division par une fraction se réduit à la multiplication par la fraction inverse. Quand on vous proposera donc de diviser un nombre par une fraction, renversez cette fraction, c'est-à-dire, faites du numérateur le dénominateur et du dénominateur le numérateur, ensuite opérez comme dans l'article précédent. Par exemple, soit le nombre 3 à diviser par la fraction $\frac{5}{6}$, l'opération revient à multiplier 3 par $\frac{6}{5}$; ce qui donne $\frac{18}{5}$ pour le quotient cherché. Qu'il faille diviser $\frac{7}{6}$ par $\frac{3}{5}$; l'opération se réduit à multiplier $\frac{7}{9}$ par $\frac{5}{3}$, ce qui donne $\frac{35}{27}$ pour le quotient cherché.

112. Problême VI. *Evaluer une fraction par rapport à un tout d'une espèce donnée.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{5}{6}$ d'une livre (monnoie) qu'on veuille évaluer en sous. Multipliez cette fraction par le nombre de fois que la livre contient le sou, c'est-à-dire par 20; vous aurez la nouvelle fraction $\frac{100}{6}$, qui représente évidemment des parties de sou : en effectuant la division du numérateur par le dénominateur, on trouvera que cette fraction vaut 16 sous et $\frac{4}{6}$ d'un sou.

Si on veut évaluer les $\frac{4}{6}$ d'un sou en deniers, on multipliera cette fraction par le nombre de fois que le sou contient le denier, c'est-à-dire par 12, ce qui donnera $\frac{48}{6}$, fraction de deniers; et divisant réellement 48 par 6, on trouvera que la fraction $\frac{4}{6}$ de sou vaut 8 deniers. Ainsi

la valeur de la fraction primitive $\frac{5}{6}$ d'une livre étant exprimée en sous et deniers est 16 sous 8 deniers.

En opérant de la même manière, on trouvera que la fraction $\frac{3}{7}$ d'une livre vaut 8 sous 6 deniers et $\frac{6}{7}$ de denier. La fraction $\frac{3}{7}$ d'une toise vaut 2 pieds 6 pouces $10\frac{2}{7}$ lignes. La fraction $\frac{3}{7}$ d'une heure vaut 25 minutes $42\frac{6}{7}$ secondes.

113. *Remarque.* Les parties décimales sont des fractions qui ont pour dénominateur l'unité suivie d'un ou plusieurs zéros : elles peuvent donc *s'évaluer* par la méthode précédente ; mais la forme sous laquelle on les écrit facilite et abrège le calcul. Veut-on savoir, par exemple, combien le nombre décimal 0,458, relatif à la toise qui est l'unité principale, vaut en pieds, pouces et lignes ? Comme la toise vaut 6 pieds, il est évident qu'en multipliant ce nombre par 6, on aura un produit qui exprimera des pieds et des parties décimales de pied. Ce produit est 2,748, c'est-à-dire 2 pieds et 0,748 de pied. Je multiplie la partie 0,748 par 12, afin de l'évaluer en pouces ; le produit est 8,976, c'est-à-dire 8 pouces et 0,976 de pouce. Multipliant la partie 0,976 par 12, afin de l'évaluer en lignes ; le produit est 11,712, c'est-àdire 11 *lignes* et 0,712 de ligne. On peut pousser l'évaluation plus loin, en sous-divisant continuellement la ligne en 12 parties égales. Mais en s'arrêtant aux opérations précédentes, on voit que le nombre décimal proposé, 0,458 de toise, vaut 2 pieds 8 pouces 11 lignes et 0,712 ou $\frac{712}{1000}$ de ligne.

De l'abaissement ou réductions des fractions.

114. Il arrive très-souvent qu'on a besoin de considérer des fractions exprimées par de grands nombres, soit que ces fractions se présentent immédiatement sous une telle forme, ou qu'elles soient amenées par le résultat d'un calcul. Or, plus le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont grands, plus l'esprit a de peine à se faire une idée précise de la fraction, c'est-à-dire de la partie que le numérateur est du dénominateur. Qu'on propose,

par exemple, la fraction $\frac{25}{125}$: en divisant, ce qui est possible, son numérateur et son dénominateur par 25, nous formerons (100) la fraction équivalente $\frac{1}{5}$. Or, on a une idée bien plus nette de la fraction $\frac{1}{5}$ que de la fraction $\frac{25}{125}$: car, dans la première, on a besoin simplement de se représenter que l'unité principale est partagée en cinq parties égales, et qu'on prend une de ces parties ; au lieu que dans la seconde il faut concevoir que l'unité principale est partagée en 125 parties égales, et qu'on en prend 25. On voit donc qu'il est très-utile de savoir exprimer les fractions par les plus petits nombres qu'il est possible. Nous en donnerons le moyen après avoir établi quelques principes touchant les nombres *premiers* et les nombres *composés*.

115. On appelle *nombre premier* ou *nombre simple* tout nombre qui n'a pas d'autre diviseur que lui-même et l'unité ; tels sont les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. Un nombre qui peut se diviser par un autre nombre que lui-même, ou que l'unité, s'appelle *nombre composé*; tels sont les nombres 4, 6, 12, etc. ; car 4 est divisible par 2 ; 6 est divisible par 2 et par 3, etc.

116. Deux nombres qui, comparés ensemble, n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité, sont appelés *nombres premiers entre eux*. Ainsi 3 et 5 sont des nombres premiers entre eux, 3 et 4 sont aussi des nombres premiers entre eux. On voit par le second exemple qu'il n'est pas nécessaire que les deux nombres comparés ensemble soient des nombres *premiers*. On nomme généralement *nombres premiers entre eux*, deux nombres quelconques qui n'ont d'autre diviseur commun que l'unité, soit que ces nombres considérés en particulier soient d'ailleurs décomposables ou non en plusieurs facteurs. La seule condition requise pour cette dénomination est que les nombres comparés n'aient pas de facteurs communs, à l'exception de l'unité qui divise nécessairement tout nombre.

117. Il est nécessaire en plusieurs occasions (et la ques-

tion se rapporte immédiatement à la matière présente) *de savoir déterminer par ordre tous les nombres simples ou premiers*. La solution de ce problême dépend des considérations suivantes.

I.

Les termes de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, etc. étant pris de deux en deux, depuis 2, sont divisibles par 2; étant pris de trois en trois, depuis 3, sont divisibles par 3; étant pris de quatre en quatre, depuis 4, sont divisibles par 4; ainsi de suite. Par exemple, 4 est divisible par 2; 6 est divisible par 3; 16 est divisible par 4, etc. La raison en est que les termes de la suite proposée allant en croissant d'une même quantité ou différence 1, le quatrième terme 4 est égal au second 2 plus la différence 1 répétée deux fois; d'où il suit que 4 est divisible par 2, puisqu'il est composé de deux parties divisibles chacune par 2; de même 6 est divisible par 3; car 6 est égal à 3 plus la différence 1 répétée 3 fois, etc.

II.

Semblablement les termes de la suite des nombres *impairs* (ou des nombres non divisibles par 2), 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, etc. étant pris de trois en trois, depuis 3, sont divisibles par 3; étant pris de cinq en cinq, depuis 5, sont divisibles par 5; étant pris de sept en sept, depuis 7, sont divisibles par 7; ainsi de suite. Par exemple, 9 est divisible par 3; 25 est divisible par 5; 35 est divisible par 7, etc. La raison en est que les termes de la suite proposée allant en croissant de la même quantité ou différence 2, le quatrième terme 9 est égal au second 3 plus la différence 2 répétée trois fois; d'où il suit que 9 est divisible par 3, puisque 9 est composé de deux parties divisibles chacune par trois: de même 25 est divisible par 5, parce que le terme 25 est égal au terme 5 plus la différence 2 répétée dix fois, etc.

III.

Cela posé, tous les nombres premiers étant impairs, à l'exception du nombre 2, il est clair que pour avoir tous les nombres premiers, non compris 2, la question est seulement d'exclure de la suite des nombres impairs tous les nombres composés. Or, on parviendra à cette exclusion en effaçant de la suite des nombres impairs,

1.° Tous les termes pris de trois en trois, à compter depuis 3;

2.° Tous les termes pris de cinq en cinq, à compter depuis 5;

3.° Tous les termes pris de sept en sept, à compter depuis 7;

Ainsi de suite. Par là on aura différentes suites, que j'appelle *suites des termes effacés.*

IV.

On observera, par rapport à ces suites de termes effacés, que la quatrième, c'est-à-dire celle qui se compteroit depuis 9, est comprise dans la première; car, ayant effacé de la suite entière des nombres impairs tous les termes pris de trois en trois, depuis 3, on a aussi effacé tous les termes pris de neuf en neuf, depuis 9, puisque 9 est multiple de 3. Pareillement la suite de termes à effacer, à compter depuis 15, seroit comprise dans la seconde suite de termes effacés, à compter depuis 5; car, ayant effacé de la suite des nombres impairs tous les termes pris de cinq en cinq, depuis 5, on a aussi effacé tous les termes pris de quinze en quinze, depuis 15, puisque 15 est un multiple de 5. Il en sera de même pour toutes les suites de pareille nature.

V.

On observera encore, par rapport à ces mêmes suites, que dans la seconde les termes effacés depuis 5 jusqu'à 25, *quarré* (1) de 5, ont déja été effacés dans la première;

---

(1) On appelle *quarré* d'un nombre, le produit de ce nombre *multiplié par lui-même.*

que dans la troisième les termes effacés depuis 7 jusqu'à 49, quarré de 7, ont déja été effacés dans les deux premières; que dans la suite des termes qu'on devroit effacer comme multiples de 11, depuis 11, les termes à effacer depuis 11 jusqu'à 121, quarré de 11, ont déja été effacés dans les suites précédentes; ainsi de suite. En effet, il est clair, par exemple, que le terme 15 pris dans la suite générale des nombres impairs doit être en même temps multiple de 3 et de 5; car, par rapport à 3, on a $15=3+2\times6$, et, par rapport à 5, qui, dans la suite des nombres impairs, est plus avancé d'un numéro vers la droite que 3, on a $15=5+2\times5=5+2\times6-2$; ce qui se réduit à $3+2\times6$. De même le terme 21, pris dans la suite générale des nombres impairs, doit être en même temps multiple de 3 et de 7; car, par rapport à 3, on a $21=3+2\times9$, et, par rapport à 7, qui, dans la suite des nombres impairs, est plus avancé de deux numéros vers la droite que 3, on a $21=7+2\times7=7+2\times9-2\times2$; ce qui se réduit à $3+2\times9$. On appliquera l'esprit du même raisonnement à tous les autres cas, et on en conclura de plus que par-delà les quarrés des nombres 5, 7, 11, etc., il se trouve encore des nombres communs, dans les différentes suites de termes, qu'on doit effacer. Ainsi les opérations nécessaires pour arriver aux nombres premiers, ne sont pas aussi nombreuses qu'elles le paroissent au premier coup-d'œil. On peut les abréger encore par d'autres considérations qui s'offriront d'elles-mêmes dans le calcul.

Rallier des Ourmes (*Mém. présentés à l'académie des sciences, tome V, page* 485) a traité au long cette matière déja ébauchée par Molières (*Leçons de Math., tome I, page* 195).

Je joins ici une petite table qui contient tous les nombres premiers depuis 1 jusqu'à 2017.

Commencement d'une Table pour les nombres premiers.

1	139	337	557	769	1013	1249	1499	1753
2	149	347	563	773	1019	1259	1511	1759
3	151	349	569	787	1021	1277	1523	1777
5	157	353	571	797	1031	1279	1531	1783
7	163	359	577	809	1033	1283	1543	1787
11	167	367	587	811	1039	1289	1549	1789
13	173	373	593	821	1049	1291	1553	1801
17	179	379	599	823	1051	1297	1559	1811
19	181	383	601	827	1061	1301	1567	1823
23	191	389	607	829	1063	1303	1571	1831
29	193	397	613	839	1069	1307	1579	1847
31	197	401	617	853	1087	1319	1583	1861
37	199	409	619	857	1091	1321	1597	1867
41	211	419	631	859	1093	1327	1601	1871
43	223	421	641	863	1097	1361	1607	1873
47	227	431	643	877	1103	1367	1609	1877
53	229	433	647	881	1109	1373	1613	1879
59	233	439	653	883	1117	1381	1619	1889
61	239	443	659	887	1123	1409	1621	1901
67	241	449	661	907	1129	1423	1627	1907
71	251	457	673	911	1151	1427	1637	1913
73	257	461	677	919	1153	1429	1657	1931
79	263	463	683	929	1163	1433	1663	1933
83	269	467	691	937	1171	1439	1667	1949
89	271	479	701	941	1181	1447	1669	1951
97	277	487	709	947	1187	1451	1693	1973
101	281	491	719	953	1193	1453	1697	1979
103	283	499	727	967	1201	1459	1699	1987
107	293	503	733	971	1213	1471	1709	1993
109	307	509	739	977	1217	1481	1721	1997
113	311	521	743	983	1223	1483	1723	1999
127	313	523	751	991	1229	1487	1733	2003
131	317	541	757	997	1231	1489	1741	2011
137	331	547	761	1009	1237	1493	1747	2017

118. Une autre question utile est de *savoir déterminer par ordre tous les diviseurs d'un nombre composé.*

Soit, par exemple, le nombre 144 dont on demande tous les diviseurs.

1.° Essayez de diviser 144 par tous les nombres premiers 1, 2, 3, 5, 7, etc. ayant soin de pousser la division par un même nombre tant qu'elle sera possible. Or, en divisant 144 par 1, le quotient est 144; divisant 144 par 2, le quotient est 72; divisant 72 par 2, le quotient est 36; divisant 36 par 2, le quotient est 18; divisant 18 par 2, le quotient est 9; et la division par 2 n'est plus possible. Divisant 9 par 3, le quotient est 3; divisant 3 par 3, le quotient est 1; et la division par les nombres simples est épuisée.

Dividendes.	Diviseurs simples.
144	1
72	2
36	2
18	2
9	2
3	3
1	3

2.° Il est clair que le nombre 144 est encore divisible par tous les multiples des diviseurs simples qu'on vient de trouver, c'est-à-dire par tous les produits de ces diviseurs pris de toutes les manières possibles, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc. Faisons ces produits, en nous contentant d'écrire une seule fois ceux qui sont les mêmes; nous trouverons les résultats suivants :

Combinaisons des diviseurs simples.	Produits correspondants.
deux à deux	4, 6, 9
trois à trois	8, 12, 18
quatre à quatre	16, 24, 36
cinq à cinq	48, 72

Par conséquent tous les diviseurs, tant simples que composés (écrits chacun une seule fois,) du nombre 144, sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

119. Problème VII. *Réduire une fraction à ses moindres termes.*

Pour réduire une fraction à ses moindres termes, ou pour la représenter par les plus petits nombres possibles,

il faut diviser son numérateur et son dénominateur par le plus grand commun diviseur qu'ils puissent avoir ; ce qui ne change pas la valeur de la fraction (100).

I.re manière.

Dans la pratique, où l'on emploie, autant qu'on peut, des opérations simples et expéditives, l'usage est d'abaisser une fraction à de moindres termes, en divisant successivement son numérateur et son dénominateur par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc., si la chose est possible, et tant qu'elle est possible. Soit, par exemple, la fraction $\frac{96}{144}$ qu'il s'agit d'abaisser ; je divise le numérateur et le dénominateur par 2, et j'ai la fraction $\frac{48}{72}$ qui a (100) même valeur que la précédente ; je divise encore une fois par 2 ; et j'ai la fraction $\frac{24}{36}$ qui a toujours même valeur. Deux nouvelles divisions par 2, qui donnent $\frac{6}{9}$. La division par 2 n'est plus possible ; je divise par 3, et j'ai la fraction $\frac{2}{3}$ qui est exprimée par les plus petits nombres possibles, parce que le numérateur et le dénominateur sont des nombres premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{96}{144}$ réduite à ses moindres termes est $\frac{2}{3}$.

On voit que, lorsqu'on a épuisé la division par un diviseur, il est inutile de tenter les divisions par les multiples de ce diviseur, parce qu'on est sûr qu'elles ne réussiroient pas. Ainsi, par exemple, ayant divisé par 2 autant qu'il est possible, on ne doit essayer de diviser ni par 4, ni par 6, ni, etc. Les nombres premiers suivants sont les seuls qu'on doive éprouver pour diviseurs.

Cette méthode est facile et commode ; mais on sent qu'elle n'est dans le fond qu'un tâtonnement : elle peut laisser quelquefois dans l'incertitude si l'on a épuisé en effet tous les diviseurs communs au numérateur et au dénominateur, lorsque ces deux nombres sont considérables, et qu'on n'a pas la patience de pousser l'épreuve des diviseurs aussi loin qu'il seroit nécessaire.

II.e manière.

Cherchez, par la méthode de l'article 118, tous les di-

viseurs du numérateur et tous ceux du dénominateur. Si dans les deux suites de diviseurs il s'en trouve qui soient les mêmes, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction proposée par le plus grand de ces diviseurs communs. Soit, par exemple, la fraction $\frac{96}{180}$ qu'il faut réduire à ses moindres termes. Je trouve que la suite des diviseurs du numérateur est 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96; et que la suite des diviseurs du dénominateur est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180. D'où je conclus que 12 est le plus grand commun diviseur de 96 et de 180. Divisant donc les deux termes de la fraction $\frac{96}{180}$ par 12, je la réduis à celle-ci $\frac{8}{15}$, qui a même valeur, et dont les termes sont premiers entre eux.

III.e manière.

Soit encore la fraction $\frac{96}{180}$ qu'on veut réduire à ses moindres termes, ou dont il faut trouver le plus grand diviseur commun à son numérateur et à son dénominateur. Il est d'abord évident que ce plus grand commun diviseur ne peut pas être plus grand que le plus petit des deux termes de la fraction, qui est le numérateur 96. J'essaie si 96 est ce diviseur; 96 se divise lui-même, mais il ne divise 180 qu'avec un reste 84. La fraction $\frac{96}{180}$ est donc la même chose que $\frac{96}{96+84}$. En cet état je vois que le plus grand diviseur cherché ne peut pas excéder 84, autrement il ne diviseroit pas la partie 84. J'essaie si 84 est ce diviseur; 84 se divise lui-même, mais il ne divise 96 qu'avec un reste 12. La fraction peut donc être écrite sous cette forme $\frac{84+12}{84+12+84}$. Alors, il est clair que le diviseur cherché ne peut pas excéder 12, autrement il ne diviseroit pas 12. Voyons si 12 est ce diviseur; 12 se divise lui-même; il divise aussi 84. Il divise donc toutes les parties de la fraction. Donc il est diviseur commun du numérateur et du dénominateur : et de plus il est le plus grand diviseur commun de ces deux termes; car on voit par la suite de nos opérations qu'un nombre plus grand que 12 n'auroit pu diviser *les deux mêmes termes*.

Après nous être assurés de la sorte que 12 est le plus grand commun diviseur cherché, si nous divisons 96 et 180 par 12, nous réduirons la fraction $\frac{96}{180}$ à celle-ci $\frac{8}{15}$ qui est sa plus simple expression.

En réfléchissant sur l'esprit des opérations précédentes, on voit que la méthode dont il s'agit revient à cette règle : *Divisez le plus grand terme de la fraction par le plus petit ; et si la division se fait sans reste, ce plus petit terme est le plus grand commun diviseur cherché. Si la division ne se fait pas sans reste, divisez le plus petit terme par le premier reste ; et si la division se fait sans reste, le premier reste est le plus grand diviseur cherché. Si elle ne se fait pas sans reste, divisez le premier reste par le second ; et si elle se fait sans reste, le second reste sera le diviseur cherché. Si la division ne se fait pas sans reste, vous continuerez à opérer de même jusqu'à ce que vous trouviez un reste qui divise exactement le précédent. Ce reste diviseur sera le plus grand diviseur commun des deux termes de la fraction ; de manière qu'en les divisant actuellement par lui, vous réduirez la fraction à ses moindres termes.*

Si, dans la suite de ces calculs on ne parvient pas à faire une division sans reste, et si en conséquence le dernier de tous les restes est l'unité, ce sera une marque que la fraction est exprimée par ses plus simples termes, et qu'elle est irréductible.

Des fractions de fractions.

120. De même que les fractions ordinaires se forment de parties de l'unité principale (94) ; si nous concevons qu'une fraction est partagée en plusieurs parties égales, le nombre qui exprimera une ou plusieurs de ces parties sera une fraction de nouvelle espèce, qu'on appelle *fraction de fraction*. Par exemple, si on a la fraction $\frac{3}{4}$, et qu'on en prenne les $\frac{2}{3}$, on formera la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$, qui s'énonce ainsi : *deux tiers de trois quarts*. On met, comme on voit, l'article *de* entre les deux fractions par lesquelles une fraction de fraction est exprimée.

121. Rien n'empêche de former, suivant la même loi, des fractions de fraction de fraction, et de pousser cette division aussi loin qu'on voudra. Telle est la fraction de fraction de fraction $\frac{4}{5}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$, qui signifie qu'on prend les *quatre cinquièmes* de la fraction de fraction *trois quarts de deux tiers*. Telle est encore la fraction de fraction de fraction de fraction $\frac{6}{7}$ *de* $\frac{4}{5}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$, qui signifie qu'on prend les *six septièmes* de la fraction de fraction de fraction *quatre cinquièmes de trois quarts de deux tiers*, etc.

Propriété générale des fractions de fraction.

122. Les fractions de fraction, en quelque nombre qu'elles soient combinées ensemble, peuvent toujours être réduites à des fractions simples. Il faut pour cela multiplier les unes par les autres les fractions simples qui entrent dans leurs expressions. Par exemple, la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ est égale au produit de $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$. Car, pour avoir les deux tiers de trois quarts, il faut d'abord diviser *trois quarts* par 3 et prendre ensuite *deux fois* le quotient ; ce qui se réduit (110) à multiplier la fraction $\frac{3}{4}$ par la fraction $\frac{2}{3}$. La fraction-produit est $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$, qui est équivalente à $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$. De même, la fraction de fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ peut être réduite en une fraction simple. Car, d'abord $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ revient à $\frac{15}{24}$, et $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{15}{24}$ revient à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$. Ainsi des autres.

Des fractions continues.

123. Si l'on divise le plus grand terme d'une fraction par le plus petit, le plus petit par le reste, ce premier reste par le second reste, le second reste par le troisième, ainsi de suite ; on développera cette fraction en une suite descendante qu'on appelle *fraction continue*. Les fractions particulières qui entrent dans son expression peuvent en être appelées les *fractions intégrantes*. Eclaircissons cela par un exemple.

124. Soit la fraction $\frac{31415926535}{10000000000}$, dont le numérateur exprime à peu de chose près la circonférence d'un cercle, tandis que le dénominateur en exprime le diamètre, comme

on le verra en géométrie. En divisant le numérateur et le dénominateur par le dénominateur, qui est le plus petit terme, elle devient $3+\frac{1415926535}{10000000000}$. Divisons le numérateur et le dénominateur de la partie fractionnaire par son numérateur; cette partie devient $\frac{1}{7+\frac{88514255}{1415926535}}$. Divisons le numérateur et le dénominateur de la partie fractionnaire qui est au dénominateur par son numérateur; cette partie devient $\frac{1}{15+\frac{88212710}{88514255}}$. Divisons le numérateur et le dénominateur de la partie fractionnaire qui est au dénominateur par son numérateur; cette partie devient $\frac{1}{1+\frac{301545}{88212710}}$. Divisons le numérateur et le dénominateur de la partie fractionnaire qui est au dénominateur par son numérateur; cette partie devient $\frac{1}{292+\frac{161570}{301545}}$. Ainsi de suite. Par toutes ces opérations nous convertirons la fraction proposée $\frac{31415926535}{10000000000}$ en la fraction continue,

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

On voit par la formation de cette suite, et par la manière dont elle est écrite, qu'en allant de gauche à droite le dénominateur de chaque fraction intégrante doit être augmenté du résultat de toutes les fractions subséquentes à droite, résultat qui se trouve comme nous l'allons voir en expliquant l'usage des fractions continues.

125. Ces sortes de fractions servent à représenter d'une manière approchée, et avec de petits nombres, la valeur d'une fraction irréductible et exprimée par de grands nombres. Pour cela, on arrête la suite à un certain terme, et on néglige toute sa partie située à la droite du terme dont il s'agit. Toutes choses d'ailleurs égales, l'approximation sera d'autant plus exacte que la première fraction

intégrante qu'on exclut aura un plus grand dénominateur. Appliquons cela à notre exemple.

1.° En prenant seulement le premier terme 3 de la fraction continue que nous venons de trouver, on aura une première valeur approchée de la fraction proposée $\frac{3141 \text{ etc.}}{1000 \text{ etc.}}$. Il est évident que cette valeur est moindre que la véritable.

2.° Prenons les deux premiers termes de la même suite: nous aurons pour seconde valeur approchée $3+\frac{1}{7}$. Or, en réduisant l'entier 3 en une fraction qui ait 7 pour dénominateur, la somme $3+\frac{1}{7}$ est la même chose que $\frac{21}{7}+\frac{1}{7}$, c'est-à-dire $\frac{22}{7}$. Cette valeur est plus grande que la fraction proposée; car le dénominateur 7 de la fraction intégrante $\frac{1}{7}$ est trop petit, puisqu'il doit être augmenté du résultat des fractions qui sont à droite, et qu'on néglige. Or il est clair qu'on augmente la valeur d'une fraction, lorsque, sans toucher à son numérateur, on diminue son dénominateur. Donc la fraction $\frac{1}{7}$ est trop grande, et conséquemment la fraction $\frac{22}{7}$ est aussi trop grande.

3.° Prenons les trois premiers termes de notre suite: nous aurons pour troisième valeur approchée $3+\cfrac{1}{7+\frac{1}{15}}$. La fraction $\frac{1}{15}$ doit être ajoutée au dénominateur 7 de la précédente; je réduis donc 7 en une fraction qui ait 15 pour dénominateur: cette fraction est $\frac{105}{15}$, en sorte que $7+\frac{1}{15}$ est la même chose que $\frac{105}{15}+\frac{1}{15}$, ou $\frac{106}{15}$. Ainsi la fraction continue partielle $\cfrac{1}{7+\frac{1}{15}}$ n'est autre chose que $\frac{1}{\frac{106}{15}}$, expression qui représente le quotient de la division du nombre 1 par la fraction $\frac{106}{15}$, et qui est par conséquent (111) la même chose que $\frac{15}{106}$. La valeur des trois premiers termes de notre suite est donc $3+\frac{15}{106}$, ou bien (en réduisant 3 en une fraction qui ait 106 pour dénominateur) $\frac{318}{106}+\frac{15}{106}$ ou $\frac{333}{106}$. Cette valeur est trop petite; car le dénominateur de la fraction intégrante $\frac{1}{15}$ où l'on s'est arrêté est trop petit. Donc la fraction $\frac{106}{15}$ est trop grande; donc le quotient de 1 divisé par cette fraction, c'est-à-dire $\frac{15}{106}$, est trop petit. Donc l'assemblage $3+\frac{15}{106}$ ou $\frac{333}{106}$ est trop petit.

4.° *En prenant les quatre* premiers termes nous au-

aurons pour quatrième valeur approchée $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\frac{1}{1}}}$.
La dernière fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 doit être ajoutée au dénominateur 15 de la précédente. Ainsi $\frac{1}{15+\frac{1}{1}}$ vaut $\frac{1}{16}$. Ajoutant cette fraction au dénominateur 7, la somme est $\frac{113}{16}$. Donc la fraction continue partielle $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\frac{1}{1}}}$ vaut $\frac{1}{\frac{113}{16}}$, c'est-à-dire (111) $\frac{16}{113}$. Donc la valeur qu'on cherche est $3+\frac{16}{113}$, ou bien $\frac{339}{113}+\frac{16}{113}$, ou enfin $\frac{355}{113}$. Cette valeur est trop grande ; car la dernière fraction intégrante $\frac{1}{1}$ est trop grande. Donc la fraction $\frac{1}{16}$ est trop petite ; donc la fraction $\frac{16}{113}$ est trop grande ; donc aussi la fraction $\frac{355}{113}$ est trop grande.

Si on veut pousser l'approximation plus loin, on continuera d'opérer de même, et on trouvera de nouvelles valeurs alternativement plus petites et plus grandes que la fraction proposée $\frac{3141,\text{ etc.}}{1000,\text{ etc.}}$. La dernière valeur trouvée $\frac{355}{113}$ approche extrêmement de cette fraction, parce que le dénominateur de la fraction intégrante $\frac{1}{292}$, qu'on commence à exclure en ce cas, est fort grand.

126. *Remarque*. Si, au lieu de la fraction $\frac{31415926535}{10000000000}$, on avoit la fraction inverse $\frac{10000000000}{31415926535}$, la première valeur $\frac{1}{3}$ seroit trop grande ; la seconde $\frac{7}{22}$ trop petite ; la troisième $\frac{106}{333}$ trop grande ; la quatrième $\frac{113}{355}$ trop petite ; ainsi de suite alternativement.

CHAPITRE VIII.

Notions sur les différentes espèces de mesures en usage ; formation et calcul des nombres complexes ; rapports des nouvelles mesures adoptées en France, avec les anciennes.

127. Il y a différentes sortes de mesures en usage, soit dans le commerce, soit dans les sciences ; et chacune d'elles a son unité fondamentale de laquelle tous les nombres de même nature dérivent par aggrégation, ou par sous-division. Ces mesures sont :

1.° Les mesures de *distances* ou de *longueurs*, appelées *mesures linéaires*.

2.° Les *mesures superficielles*, qui font connoître combien de fois une surface donnée, telle que celle d'un jardin, celle d'une pièce d'eau, etc., contient une certaine *mesure quarrée* (1), prise pour unité.

3.° Les mesures de *capacité* ou de *contenance*, par lesquelles on détermine combien de fois un corps donné contient la *mesure*, soit *cubique*, soit *réductible à une forme cubique*, qui a été prise pour l'unité ; par exemple, combien un tonneau contient de pintes de vin, en prenant la pinte pour l'unité.

4.° Les *mesures de poids*, pour savoir combien de fois un corps pesant, ou l'assemblage de plusieurs corps pesants, contient le poids pris pour unité.

---

(1) On appelle *mesure quarrée*, ou un *quarré*, une surface terminée par quatre lignes égales, perpendiculaires entre elles. De là résulte l'idée de la *mesure cubique*, ou du *cube*, par où l'on entend un solide, en forme de dez, terminé par six faces quarrées égales.

Nous empruntons ces notions de la géométrie, ou nous les regardons comme des connoissances primordiales, assez intelligibles par elles-mêmes, au moyen de la simple lumière naturelle, qui fournit seule les premiers élémens de toutes les sciences.

5.° Les *mesures monétaires*, pour comparer à une pièce de monnoie dont la valeur est donnée, toutes les pièces de monnoie, soit d'un même métal, soit de différents métaux, qui circulent dans le commerce.

6.° Les *mesures de temps*, pour rapporter tous les temps à une même unité, qui se règle ordinairement sur le cours du soleil, ou sur celui de la lune.

On pourroit ajouter encore à cette énumération les *mesures angulaires*; mais, outre qu'elles reviennent dans le fond aux mesures linéaires dont nous avons parlé, on ne pourra s'en faire une idée claire et distincte que dans la géométrie, et en particulier dans la trigonométrie.

128. Lorsque la quantité qui a été prise pour unité n'est pas contenue un nombre juste de fois dans les choses (de même espèce) qu'on veut mesurer, les parties restantes, comparées à cette unité, forment des fractions. Or les calculs nécessaires pour trouver les sommes, ou les différences, ou les produits, etc., de plusieurs fractions peuvent être longs et embarrassants, surtout si elles n'ont pas le même dénominateur. Alors on a préféré de tendre au même but en subdivisant l'unité principale en plusieurs autres unités, chacune de celles-ci en d'autres unités, ainsi de suite; de sorte qu'on a par là continuellement de nouvelles unités qui vont toujours en diminuant, et qui sont toutes réductibles aux unités de la plus basse espèce. Ainsi, par exemple, on employoit ci-devant la *toise* ou le *pied*, pour l'unité dans les mesures de distances; la toise se divisoit en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, etc. Dans les monnoies, on prenoit la livre pour l'unité; et on divisoit la livre en 20 sols, le sol en 12 deniers, etc. Il est clair que dans tous les cas les plus hautes unités pouvoient être converties en unités de la plus basse espèce. Par exemple, en multipliant les toises par 6, on les convertissoit en pieds; en multipliant les pieds par 12, on les convertissoit en pouces, etc. De même, dans les monnoies, en multipliant les livres par 20, on les convertissoit en sols; en multipliant les sols par 12, on les convertissoit en deniers; etc.

Par ces différentes manières de subdiviser l'unité principale dans les différentes espèces de choses, on forme des nombres dont les assemblages s'appellent *nombres complexes*. Ainsi, dans les mesures de distances, l'assemblage 345 toises 5 pieds 8 pouces est un nombre complexe ; de même, dans les monnoies, l'assemblage 754 liv. 15 sols 8 d. est un nombre complexe.

129. Quoique l'usage des anciennes mesures ait été aboli parmi nous, je ne puis cependant me dispenser d'en donner ici des notions un peu détaillées, soit pour faciliter l'intelligence des ouvrages où elles sont employées, soit pour faire connoître les bases d'où l'on est parti pour établir les nouvelles mesures dont nous parlerons ci-dessous. Voici donc de petites tables qui contiennent 1.° les signes par lesquels on indique les anciennes mesures. 2.° Les rapports des unités de différentes valeurs, dans chaque espèce de choses.

Mesures linéaires.

1.° On désigne la toise par T, le pied par P, le pouce par p, la ligne par L, le point par pt, etc.

2.° On a 1 T=6 P; 1 P=12 p; 1 p=12 L; 1 L=12 pt; etc.

Mesures superficielles.

1.° On désigne la toise quarrée par TT, ou par T^2; le pied quarré par PP, ou par P^2; le pouce quarré par pp, ou par p^2; la ligne quarrée par LL, ou par L^2; etc.

2.° On a $1\ T^2=36 P^2$; $1\ P^2=144\ p^2$; $1\ p^2=144\ L^2$; etc.

Mesures de capacité.

1.° On désigne la toise cube par TTT, ou par T^3; le pied cube par PPP, ou par P^3; le pouce cube par ppp, ou par p^3; la ligne cube par LLL, ou par L^3; etc.

2.° On a $1\ T^3=216\ P^3$; $1\ P^3=1728\ p^3$; $1\ p^3=1728\ L^3$; etc.

Mesures de poids.

1.° On désigne la livre (poids) par ℔, le marc par M, l'once par O ou ℥, le gros par G ou ʒ, le denier par D ou ℈, le grain par *g*, etc.

2.° On a 1 ℔=2 M ; 1 M=8 ℥; 1 ℥=3 ʒ; 1 ʒ=24 D ; etc.

Mesures monétaires.

1.° On désigne la livre (monnoie) par ₶, le sol par ^{s} ; le denier par ^{d}; etc.

2.° On a $1^{₶}=20^{s}$; $1^{s}=12^{d}$; $1^{d}=12$ oboles, etc.

Mesures de temps.

1.° On désigne le jour par J, l'heure par H, la minute par $'$, la seconde par $''$, etc.

2.° On a 1 J=24 H ; 1 H=60$'$; 1$'$=60$''$; etc.

Cela posé, je passe aux opérations de l'arithmétique sur les nombres complexes ; je me bornerai à ceux qui sont principalement utiles dans le commerce ordinaire de la société.

Je n'ai pas besoin de faire observer qu'on ne peut opérer dans chaque calcul que sur des nombres complexes de même nature ; que, par exemple, il seroit absurde de vouloir ajouter un assemblage de toises, pieds, pouces, avec un assemblage de livres, sols et deniers.

Addition des nombres complexes.

130. Ecrivez les nombres qu'il s'agit d'ajouter, les uns sous les autres, de manière que ceux de même espèce soient dans une même colonne ; et commencez par ajouter les nombres de la plus basse valeur : retenez autant d'unités qu'ils en peuvent fournir, pour les porter avec celles de l'espèce immédiatement supérieure. Le résultat de toutes ces additions forme la somme totale.

131. Exemple I. *Additionner ensemble les trois nombres composés chacun de livres, sols et deniers, qu'on voit ici.*

345₶	8^{s}	9^{d}
542	12	11
2453	10	6
3341₶	12^{s}	2^{d}

Je commence par ajouter ensemble les deniers ; et comme les dixaines de deniers ne sont pas des unités particulières, et qu'il faut 12 deniers pour faire un sou, on ajoutera à la fois les dixaines de deniers avec les unités, pour ne former du tout

qu'une même somme. Ainsi je dirai 9 deniers et 11 deniers font 20 deniers, et 6 deniers font 26 deniers. Dans ces 26 deniers il y a 2 sous et 2 deniers. J'écris les 2 deniers sous la colonne des deniers, et je retiens 2 sous pour les ajouter avec les sous.

Passant à l'addition des sous, et observant que deux dixaines de sous font une livre, j'additionnerai successivement les unités et les dixaines de sous. Je dirai donc 2^{s} de retenus de la colonne des deniers, et 8^{s} font 10^{s}, et 2^{s} font 12^{s}. J'écris 2^{s} sous les unités de sous, et je retiens 1 dixaine de sous pour la joindre aux dixaines de sous. Je poursuis, et je dis, 1 dixaine de sous de retenue, et 1 dixaine font 2 dixaines, et 1 font 3 dixaines, qui donnent 1 dixaine de sous et 1^{tt}. J'écris la dixaine de sous, et je retiens 1^{tt} pour la joindre à la somme des livres.

Cette somme se trouve comme nous l'avons vu pour les nombres incomplexes.

Ainsi la somme totale des trois nombres proposés est 3341^{tt} 12^{s} 2^{d}.

Il est clair que, dans les nombres de ce genre qu'on propose d'ajouter ensemble, il ne peut pas entrer au rang *des sous plus* de 19 sous, ni au rang des deniers plus de 11 *deniers;* autrement il en résulteroit des livres et des sous, *qui* seroient censés faire partie des livres et des sous et qu'il faudroit y rapporter. De même, s'il étoit question d'ajouter ensemble des nombres composés de jours, d'heures, de minutes, on ne pourroit pas mettre plus de 23 heures au rang des heures, ni plus de 59 minutes au rang des minutes. Ainsi des autres espèces de nombres complexes.

152. Exemple II. *Ajouter ensemble les trois nombres suivants, qui sont composés de toises, pieds, pouces.*

La somme des pouces est 29, qui donnent 5 pouces et 2 pieds. J'écris les 5 pouces, et je retiens les 2 pieds pour les joindre aux pieds.

345^{T}	5^{p}	8^{po}
98	3	11
1249	4	10
1694^{T}	2^{p}	5^{po}

La somme des pieds, en y comprenant les 2 dont on

vient de parler, est 14, qui donnent 2 pieds et 2 toises; j'écris les 2 pieds, et je retiens les deux toises.

Ces deux toises, jointes à la somme de toutes les autres toises, forment la somme de 1694 toises.

Ainsi la somme totale des trois nombres qu'il s'agissoit d'ajouter est 1694^{T} 2^{p} 5$^{po.}$

Soustraction des nombres complexes.

133. Ecrivez le plus petit nombre sous le plus grand en mettant les unités de même espèce les unes sous les autres, et retranchez toutes les parties inférieures des supérieures en commençant par les unités du plus bas ordre. Quelquefois on sera obligé d'emprunter sur les colonnes des plus hautes unités; on entendra facilement par des exemples comment ces emprunts doivent se faire.

134. Exemple I. *Du nombre*........	4254^{tt}	17^{s}	11^{d}
ôter le nombre	259	15	8
Reste	3995^{tt}	2^{s}	3^{d}

Commençons par retrancher les deniers des deniers. En ôtant 8 de 11^{d} restent 3^{d}, qu'on écrira sous les deniers.

Otant 15^{s} de 17^{s}, c'est-à-dire les unités de sous des unités de sous, et la dixaine de la dixaine, restent 2^{s} qui s'écrivent sous les unités de sous.

La soustraction des livres se fait comme pour les nombres incomplexes, et ce reste particulier est 3995^{tt}.

Ainsi le reste de toute l'opération est 3995^{tt} 2^{s} 3^{d}.

135. Exemple II. *Du nombre*........	425^{tt}	4^{s}	7^{d}
ôter le nombre	29	17	9
Reste	395^{tt}	6^{s}	10^{d}

Comme on ne peut pas ôter 9 deniers de 7 deniers, j'emprunte sur les 4 sous 1 sou qui vaut 12 deniers, et qui, joint aux 7 deniers, forme la somme 19 deniers, dont ôtant 9 deniers, restent 10 deniers que j'écris.

On ne peut pas ôter 7 sous de 3 sous, ou 8 sous de 4 sous. Ainsi on empruntera sur les 5 livres une livre qui vaut 2 dixaines de sous; prenant une de ces dixaines, et ...ant à 4 sous, on aura 14 sous, dont retranchant

8 sous, restent 6 sous qu'on écrira. Ensuite, ôtant de l'autre dixaine empruntée la dixaine inférieure, reste 0.

Il ne s'agit plus que de retrancher 29 livres de 424 liv., ou, ce qui revient au même, 30 livres de 425 livres, restent 395 livres.

Le reste de la soustraction est donc 395^{tt} 6^{s} 10^{d}.

136. Exemple III. *Du nombre* . . . . 634^{T} 0$^{pi.}$ 0$^{po.}$
ôter le nombre 68 4 11
Reste 565^{T} 1$^{pi.}$ 1$^{po.}$

Comme il n'y a ni pieds ni pouces dans le nombre supérieur, on empruntera sur les toises une toise qui vaut 6 pieds; et sur ces 6 pieds on en prendra un qui vaut 12 pouces, dont retranchant 11 pouces, reste 1 pouce.

De 5 pieds ôtant 4 pieds, ou de 6 pieds ôtant 5 pieds, reste 1 pied.

De 634 toises ôtant 69 toises, restent 565 toises.

Le reste de toute la soustraction est donc 565 1$^{pi.}$ 1$^{po.}$.

137. Exemple IV. *Du nombre*. . . . 5486℔ 0^{M} 0℥ 0 3
ôter le nombre. 349 1 7 7
Reste 5136℔ 0^{M} 0℥ 1 3

Il faut emprunter sur les livres du nombre supérieur 1 livre qui vaut 2 marcs; sur ces 2 marcs prendre 1 marc qui vaut 8 onces; sur ces 8 onces prendre 1 once qui vaut 8 gros; ensuite faire la soustraction comme dans l'exemple précédent. On trouvera pour reste 5136℔ 0^{M} 0℥ 1 3.

Multiplication des nombres complexes.

138. Il peut arriver que le multiplicande étant complexe, le multiplicateur soit incomplexe, ou bien que le multiplicande étant incomplexe ou complexe, le multiplicateur soit complexe; ce qui fait deux cas que je vais examiner séparément.

139. I. cas. *Le multiplicateur étant incomplexe.*

Le multiplicateur étant toujours destiné à marquer combien de fois on repète le multiplicande pour former le produit, ne peut jamais être qu'un nombre abstrait. On

trouve le produit en multipliant toutes les parties du multiplicande par le multiplicateur, et ayant soin de retenir pour les ordres supérieurs les unités que les produits inférieurs peuvent y fournir.

140. Exemple. *Multiplier* .... 345^{tt} 8^{s} 6^{d}
par........................... 9
Produit 3108^{tt} 16^{s} 6^{d}

Ayant disposé le multiplicande et le multiplicateur comme on le voit ici, je commence par multiplier les 6 deniers par 9; le produit est 54 deniers, qui contiennent 4 sous et 6 deniers. J'écris les 6 deniers, et je retiens les 4 sous pour les joindre aux sous.

Le produit de 8^{s} par 9 est 72^{s}, qui, avec les 4^{s} de retenus, font 76^{s}, c'est-à-dire 3^{tt} 16^{s}; j'écris les 16^{s}, et je retiens les 3 livres.

Le produit de 5^{tt} par 9 est 45^{tt}, qui, avec les 3^{tt} de retenues, font 48^{tt}. Le reste de l'opération s'achève comme pour les nombres incomplexes; et on trouve que le produit total est 3108^{tt} 16^{s} 6^{d}.

141. *Remarque.* Dans cet exemple, où le multiplicateur n'est exprimé que par un seul chiffre, nous avons commencé l'opération par les deniers, et nous avons déterminé tout d'un coup les sous fournis par les deniers, et les livres fournies par les sous. Mais si le multiplicateur étoit exprimé par plusieurs chiffres, les mêmes déterminations ne seroient pas faciles à exécuter de tête; pour y parvenir il faudroit faire à part des multiplications, et ensuite des divisions pour convertir les espèces inférieures en d'autres d'ordres supérieurs, ce qui demanderoit beaucoup de calcul. En ce cas l'opération se fait d'une manière plus abrégée, comme je vais l'expliquer sur un exemple.

142. Exemple. *Multiplier* . . . . 459₶ 15^s 11^d
par 548

	Premier produit partiel	3672₶		
	Second produit partiel	1836		
	Troisième produit partiel	2295		
Pour 10 sous.	Quatrième produit partiel	274		
5	Cinquième produit partiel	137		
1	Faux produit	~~27~~	~~8^s~~	
6 deniers.	Sixième produit partiel	13	14	
3	Septième produit partiel	6	17	
2	Huitième produit partiel	4	11	4^d
	Produit total	251968₶	2^s	4^d

Je commence par multiplier les 459₶ par le multiplicateur 548 ; ce qui donne les trois premiers produits partiels qu'on voit dans le tableau précédent.

De là je passe à la multiplication de 15^s par 548, et j'observe que si j'avois à multiplier 1₶ par 548, j'aurois pour produit 548₶. Donc, puisque 15^s ne sont qu'une certaine partie de la livre, il est évident que le produit de 15^s par 548, réduit en livres, doit être la même partie de 548₶, que 15^s le sont de 1₶. Or, 15^s sont les trois quarts de 1₶, ou bien (en les décomposant en 10^s et 5^s), ils en sont la moitié et le quart. Donc, si nous prenons la moitié de 548₶, puis le quart de cette quantité, ou la moitié de la moitié précédente, nous aurons tout d'un coup, en livres, le produit de 15^s par 548. Ces opérations se font sans peine à vue. Nous trouverons par là le quatrième et le cinquième produits partiels.

Enfin je viens à la multiplication de 11^d par 548 ; et, pour parvenir à trouver tout d'un coup les livres et les sous que ce produit contiendra, je commence par observer que si j'avois à multiplier 1^s par 548, j'aurois pour produit la vingtième partie 548^d, ou la cinquième partie du produit que j'ai trouvé pour 5^s. Je prends donc la cinquième partie de ce dernier produit 137₶, et j'ai pour le produit supposé d'un sou, 27₶ 8^s. J'en barre les chiffres parce qu'il n'est destiné qu'à me faciliter la multiplication de 11^d par 548,

et qu'on n'en doit pas tenir compte dans l'addition qu'on fera de toutes les parties de la multiplication. Cela posé, je partage 11^{d} en trois parties, 6^{d}, 3^{d} et 2^{d}. Pour 6^{d}, qui sont la moitié d'un sou, je dois avoir la moitié du produit pour 1 sou. Je prends donc la moitié de 27^{tt} 8^{s}; et j'ai 13^{tt} 14^{s}. Pour 3^{d}, moitié de 6^{d}, je dois avoir la moitié du produit pour 6^{d}. Ainsi je prends la moitié de 13^{tt} 14^{s}, et j'ai 6^{tt} 17^{s}. Enfin pour 2^{d}, tiers de 6^{d}, je dois avoir le tiers du produit pour 6^{d}. Je prends donc le tiers de 13^{tt} 14^{s}, et j'ai 4^{tt} 11^{s} 4^{d}.

Toutes les parties du multiplicande ont ainsi été multipliées par le multiplicateur; et, en additionnant ensemble tous les produits particuliers, on aura le produit total 251968^{tt} 2^{s} 4^{d}.

Cet exemple est emprunté du calcul des monnoies; mais, en réfléchissant sur l'esprit de la méthode que nous venons d'employer, on l'étendra facilement à d'autres cas.

143. IIe cas. *Le multiplicateur étant complexe.*

Le multiplicateur est complexe quand, outre les entiers, il contient une ou plusieurs fractions. Alors, après avoir multiplié comme ci-dessus le multiplicande par les entiers du multiplicateur, on le multipliera encore par les fractions du même facteur; ce qui se fera en prenant les mêmes parties du multiplicande que les fractions le sont de l'unité.

144. Exemple I. *Multiplier* . . . . 345^{tt} 8^{s} 0^{d}
par. . . . . 78$\frac{2}{3}$

Je multiplie d'abord tout le multiplicande par 78, comme ci-dessus. Ensuite je multiplie par $\frac{2}{3}$, ou j'en prends les deux tiers, ou, ce qui est encore la même chose, j'en prends le tiers 115^{tt} 2^{s} 8^{d}, que j'écris deux fois.

	2760^{tt}		
	2415		
	31	4^{s}	
	115	2	8^{d}
	115	2	8
Prod. total	27171^{tt}	9^{s}	4^{d}

145. Exemple II. *La toise d'un certain ouvrage de menuiserie étant supposée coûter* 24^{tt} 12^{s} 6^{d}, *on demande combien coûteront* 345^{T} 5^{p} 8^{po}.

Puisque chaque toise vaut 24^{tt} 12^{s} 6^{d}, il est clair qu'en répétant cette valeur le même nombre de fois que la quan-

tité ($345^{T}\ 5^{p}\ 8^{po.}$) contient une toise, on aura la valeur cherchée. Or, ce nombre de fois est un nombre abstrait, qui est composé d'abord de 345 entiers, à raison des 345^{T}, et ensuite de deux fractions, à raison des deux parties 5^{p} et $8^{po.}$, qui ne sont que des fractions de la toise. Voici donc l'opération.

1.° Je multiplie d'abord tout le multiplicande par 345.

2.° Ayant décomposé les 5 pieds du multiplicateur en deux parties, 3 pieds et 2 pieds, dont l'une est la moitié, l'autre le tiers de la toise, il est évident qu'à raison de la première, je dois prendre la moitié, et, à raison de la seconde, le tiers du multiplicateur entier $24^{tt}\ 12^{s}\ 6^{d}$. Ces deux opérations me donnent les deux produits $12^{tt}\ 6^{s}\ 3^{d}$, et $8^{tt}\ 4^{s}\ 2^{d}$.

3.° Pour les 8 pouces qui sont le tiers de 2 pieds, j'aurai le tiers du produit que je viens de trouver pour 2 pieds. Je prends donc le tiers de $8^{tt}\ 4^{s}\ 2^{d}$, et j'ai $2^{tt}\ 14^{s}\ 8\frac{2}{3}^{d}$.

24^{tt}	12^{s}	6^{d}
345^{T}	5^{p}	$8^{po.}$
120^{tt}		
96		
72		
207		
8	12^{s}	6^{d}
12	6	3
8	4	2
2	14	$8\frac{2}{3}$
8518^{tt}	17^{s}	$7\frac{2}{3}^{d}$

Additionnant ensemble tous les produit partiels, leur somme donnera le produit total $8518^{tt}\ 17^{s}\ 7\frac{2}{3}^{d}$.

On peut remarquer que si dans la première multiplication, celle de 24^{tt} par 345, on avoit regardé par la pensée 345 comme la multiplicande, et 24 comme le multiplicateur, elle n'auroit donné que deux produits partiels, au lieu de trois que nous avons écrits. Cette interversion mentale des facteurs sert souvent à abréger le calcul.

146. Exemple III. *On est convenu de payer à une personne la somme de* $319^{tt}\ 7^{s}\ 8^{d}$ *par an, on demande ce qui lui sera dû au bout de* $15^{ans}\ 10^{mois}\ 18^{jours}$.

Le tableau de l'opération suffit seul pour en montrer le procédé.

		319^{tt}	7^{s}	8^{d}
		15^{ans}	10^{mois}	18^{jours}.
		1595		
		319		
Pour	5^{sous}	3	15^{s}	
	2	1	10	
	$8^{deniers}$	0	10	
	6^{mois}	159	13	10^{d}
	3	79	16	11
	1	26	12	$3\frac{2}{3}$
	15^{jours}	13	6	$1\frac{5}{6}$
	3	2	13	$2\frac{23}{30}$
		5072^{tt}	17^{s}	$5^{d}\frac{4}{15}$

Division des nombres complexes.

147. Je distingue deux cas : l'un où, le dividende étant complexe, le diviseur est imcomplexe ; l'autre où, le dividende étant incomplexe ou complexe, le diviseur est complexe. Examinons séparément ces deux cas.

148. I. cas. *Lorsque le diviseur est incomplexe.*

On divisera successivement toutes les parties du dividende par le diviseur, et on aura au quotient des unités de différentes espèces.

149. Exemple. *Partager* 345^{tt} 8^{s} 9^{d} *entre 24 personnes.*

Il est clair que la question se réduit à partager le dividende en 24 parties égales. Je commence par diviser les livres par 24; le quotient est 14^{tt}, et il reste 9^{tt}, qui, divisées par 24, donnent la fraction $\frac{9}{24}$ d'une livre.

Cette fraction doit être évaluée en sous. Pour cela, il faut (112) en multiplier le numérateur 9 par 20 et diviser le produit par 24. Mais comme nous devons ensuite diviser 8^{s} par 24, nous réunirons cette division à la précédente, pour abréger. Ainsi, après avoir multiplié le nombre 9, regardé comme exprimant des sous, par le nombre abstrait 20, ce qui donne 180^{s}, j'ajoute 8^{s} au produit, et je divise la somme 188^{s} par 24; le quotient est 7^{s}, et il reste 20^{s} qui donnent la fraction $\frac{20}{24}$ d'un sou.

J'évalue cette fraction en deniers, en multipliant son numérateur par 12, et divisant le produit par 24; et comme nous avons ensuite 9^d à diviser par 24, je multiplie d'abord le nombre 20, regardé comme représentant des deniers, par 12; le produit est 240^d, à quoi joignant 9^d, j'ai la somme de 249^d, qui, étant divisée par 24, donne pour quotient 10^d et la fraction $\frac{9}{24}$, ou $\frac{3}{8}$ d'un denier. Cette fraction ne peut pas être évaluée en unités d'une espèce inférieure, parce qu'il n'y en a pas de plus basse espèce que le denier qui aient cours dans le commerce de la société. Ainsi je laisse cette fraction sous sa forme naturelle. On voit ci-après toute la suite des opérations que nous venons d'indiquer.

Div. 345^{tt}	8^s	9^d	24 diviseur.
105			14^{tt} 7^s $10^d\ \frac{3}{8}$ quotient.
9	9		
	20		
	180		
	8		
	188		
	20	20	
		12	
		240	
		9	
		249	
		9	

150. II. cas. *Lorsque le diviseur est complexe.*

La division peut alors se faire de différentes manières; mais le moyen le plus simple et le plus commode est de rendre le diviseur incomplexe, en le réduisant tout en unités de l'ordre le plus bas de celles qu'il contient; ce qui ramène l'opération au premier cas.

151. Exemple I. *Diviser* 345^{tt} 6^s *par* $24\frac{1}{3}$.

Je commence par réduire les 24 unités simples du diviseur en *tiers*; ce qui se fait (103) en multipliant 24 par 3,

et mettant sous le produit le dénominateur 3. On a ainsi la fraction $\frac{72}{3}$, à laquelle ajoutant la fraction $\frac{2}{3}$, il vient $\frac{74}{3}$ pour le diviseur. Or, (111) diviser 345^{tt} 8^{s} par la fraction $\frac{74}{3}$ c'est multiplier le dividende par le dénominateur 3, et diviser le produit par le numérateur 74. Ainsi, multiplions d'abord 345^{tt} 8^{s} par 3, nous aurons le produit 1036^{tt} 4^{s}, qu'il ne s'agira plus que de diviser par 74.

Div. 1036^{tt} 4^{s} 0^{d}	74 diviseur.
296	14^{tt} 0^{s} $\frac{24}{37}^{d}$ quotient.
0	

On trouvera que les 1036^{tt}, divisées par 74, donnent juste 14^{tt} au quotient. Restent 4^{s} à diviser par 74; cette opération ne peut pas donner des sous au quotient. J'écris donc zéro au rang des sous. Ensuite j'évalue la fraction $\frac{4}{74}$ d'un sou en deniers, c'est-à-dire, que je multiplie 12^{d} par 4, et j'ai 48^{d}, dont la division par 74 ne peut donner que la fraction de denier $\frac{48}{74}$, ou $\frac{24}{37}$, que j'écris. Le quotient total demandé est donc 14^{tt} 0^{s} $\frac{24}{37}^{d}$.

152. Exemple II. *Diviser* 7^{tt} 8^{s} 3^{d} *par* 2^{tt} 2^{s} 6^{d}.

Je réduis le diviseur en deniers, en multipliant les livres par 20, ce qui donne des sous; et ensuite les sous par 12, ce qui donne des deniers. Je réduis aussi, par les mêmes opérations, le dividende en deniers, pour avoir un nouveau dividende qui ait des unités de même espèce que le diviseur. Par cette double transformation du dividende et du diviseur, la question est réduite à diviser 1779^{d} par 510^{d}. Le quotient est le nombre abstrait 3 $\frac{83}{170}$.

Div. 1779	510 diviseur.
249	3 $\frac{83}{170}$ quotient.

153. Exemple III. *On suppose que* 24^{T} 5^{p} 8^{po}. *d'un certain ouvrage ont coûté* 814^{tt} 6^{s} 9^{d}; *et on demande à combien revient la toise.*

Il est visible qu'autant de fois le nombre (24^{T} 5^{p} 8$^{po.}$) contient une toise, autant de fois le nombre (814^{tt} 6^{s} 9^{d}) contient le prix d'une toise. Ainsi la question consiste à diviser 814^{tt} 6^{s} 9^{d} par le quotient de la quantité (24^{T} 5^{p} 8$^{po.}$)

divisée par 1 toise. Je réduis 1 toise en pouces; elle en vaut 72. Je réduis pareillement les $24^{\text{t}}\ 5^{\text{p}}\ 8^{\text{po.}}$ en pouces; elles en valent 1796. Le quotient de la quantité ($24^{\text{t}}\ 5^{\text{p}}\ 8^{\text{po.}}$) divisée par une toise, est donc la fraction abstraite $\frac{1796}{72}$. Tout cela posé, il ne s'agit plus que de diviser $814^{\text{tt}}\ 6^{\text{s}}\ 9^{\text{d}}$ par $\frac{1796}{72}$; ce qui se réduit à multiplier d'abord $814^{\text{tt}}\ 6^{\text{s}}\ 9^{\text{d}}$ par 72, et à diviser ensuite le produit résultant $58632^{\text{tt}}\ 6^{\text{s}}$ par 1796. On trouvera pour quotient $32^{\text{tt}}\ 12^{\text{s}}\ 11\frac{23}{449}{}^{\text{d}}$.

Nouvelles mesures.

154. Les nouvelles mesures ont un avantage particulier et très-considérable : c'est que l'unité principale, dans chaque espèce, est continuellement subdivisée en dix parties égales; ce qui rappelle les opérations de l'arithmétique sur ces mesures à la numération décimale dont nous avons traité dans les chapitres I, II, III, IV, V et VI. Toutes ces mesures ont pour base la longueur du quart d'un méridien terrestre. La dix-millionième partie de ce quart de méridien forme l'unité de mesure, à laquelle on a donné le nom de *mètre*.

155. Par les opérations qui ont été faites autrefois en France, au Pérou et au Cercle polaire, pour déterminer la figure de la terre, on trouve que la longueur moyenne d'un degré du méridien terrestre vaut 57027 toises, et que par conséquent les 90 degrés de ce méridien valent 5132430 toises. Divisant ce nombre par 10 millions, on trouve pour quotient 3 pieds 11 lignes et 44 centièmes de ligne : valeur du *mètre* que l'on a adopté provisoirement depuis quelques années. Suivant les nouvelles déterminations du quart du méridien, commencées par l'académie des sciences, et achevées en dernier lieu par l'Institut national, la longueur du mètre est de 3 pieds 11 lignes et 296 millièmes de ligne. D'où l'on voit que le mètre provisoire surpasse le nouveau mètre de 144 millièmes de ligne : différence qui peut être négligée sans craindre d'erreur sensible, dans les mesures commerciales. D'ailleurs, il est facile d'y avoir égard, puisque dans toute éva-

luation faite en mètres provisoires, il ne s'agira que de retrancher, pour chacun de ces mètres, 144 millièmes de ligne, afin d'obtenir une évaluation en nouveaux mètres.

Dans ce qui suit, j'emploierai le mètre provisoire, le nouveau mètre n'étant pas encore introduit dans le commerce; mais les raisonnements seront d'ailleurs indépendants de cette supposition particulière, et s'appliqueront également à tout autre mètre, quelque puisse être sa valeur.

156. Considérons donc, dans les mesures de longueur, le mètre comme l'unité principale. De dix de ces unités, on forme un *décamètre*; de dix décamètres, on forme un *hectomètre*; de dix hectomètres, on forme un *kylomètre*; de dix kylomètres, on forme un *myriamètre*; ainsi de suite, en allant de droite à gauche dans la progression ascendante des nombres. On voit que les décamètres, les hectomètres, les kylomètres, les myriamètres, etc. sont les dixaines, les centaines, les mille, etc. de l'unité principale. Au contraire, dans la progression descendante des nombres, ou en allant de droite à gauche de l'unité principale, on décompose cette unité, ou le mètre, en dix *décimètres*, le démi-mètre en dix *centimètres*, le centimètre en dix *millimètres*, etc.; de sorte que les décimètres, les centimètres, les millimètres, etc. sont les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc. de l'unité principale.

Dans les mesures superficielles, on prend pour unité une surface appelée *are*, laquelle est un quarré ayant pour côté le *décamètre*; et, en suivant la même loi que pour les mesures linéaires, on forme le *décare*, l'*hectare*, le *kylare*, le *myriare*, etc., dans la progression ascendante des nombres; et le *déciare*, le *centiare*, le *milliare*, etc., dans la progression descendante. Les décares, les hectares, les kylares, les myriares, etc., sont respectivement les dixaines, les centaines, les mille, etc. de l'unité principale ou de l'*are*; et les déciares, les centiares, les milliares, etc., en sont les dixièmes, les centièmes, les millièmes, etc.

Dans les mesures de capacité, surtout pour les fluides, l'unité de mesure est le *litre*, dont la valeur est un cube ayant pour côté le décimètre ; et on forme dans la progression ascendante des nombres, le *décalitre*, l'*hectolitre*, le *kylolitre*, etc. ; dans la progression descendante, le *décilitre*, le *centilitre*, le *millilitre*, etc.

Pour la mesure particulière des bois, on prend pour unité le *stère*, qui vaut un mètre cube, dont on forme le *décistère*, le *centistère*, le *millistère*, etc., dans la progression descendante. On n'a point encore donné de noms particuliers aux nombres de la progression ascendante, qui se comptent par dixaines, centaines, etc. de stères.

Dans les mesures de poids, on prend pour unité le *gramme*, qui est le poids du centimètre cubique d'eau distillée à la température de la glace; et on forme, en montant, le *décagramme*, l'*hectogramme*, le *kylogramme*, le *myriagramme*, etc., et, en descendant, le *décigramme*, le *centigramme*, le *milligramme*, etc.

Dans les mesures monétaires, on prend pour unité une pièce d'argent, qui pèse cinq grammes, et qui contient un dixième d'alliage et neuf dixièmes d'argent pur. On donne à cette unité le nom de *franc*.

Pour les mesures de temps, il n'y a rien de bien fixe à l'égard de l'unité, qui est tantôt une heure, tantôt une minute, etc.

Quelquefois aussi, dans les autres mesures, on ne s'assujétit pas à prendre pour unités celles que nous avons désignées : on choisit celles qui donnent les résultats les plus simples dans chaque espèce particulière de calculs : par exemple, s'il s'agit de grands poids, on prend souvent pour unité le poids d'un pied cube d'eau, celui d'une toise cube d'eau, etc.

157. Je joins ici deux tables que j'ai extraites du *Manuel républicain*, imprimé chez P. Didot l'aîné, lesquelles sont d'un usage très-commode et suffisant pour comparer les mesures anciennes et nouvelles. Celles-là sont les anciennes mesures de Paris.

La mesure (ancienne ou nouvelle), qui est écrite la première, est exprimée par la seconde et parties décimales de la seconde. Quand on voudra ensuite convertir les parties décimales de la seconde table en mesures anciennes, suivant les subdivisions de l'ancienne unité principale, cette évaluation se fera par la méthode de l'article 113.

TABLE I.re

Rapports des anciennes mesures avec les nouvelles.

MESURES DE LONGUEUR.

L'aune vaut en mètre	1,188
La perche de 18 pieds vaut en mètres	5,845
La perche de 22 pieds vaut en mètres	7,144
La toise vaut en mètre	1,948
Le pied vaut en décimètres	3,247
Le pouce vaut en centimètres	2,706
La ligne vaut en millimètres	2,255
La lieue de 25 au degré ou de 2281 toises vaut en kilomètres	4,444
La lieue de 20 au degré ou de 2851 toises vaut en kilomètres	5,556
La lieue moyenne ou de 2566 t. vaut en kilomètres.	5,000

MESURES DE SUPERFICIE.

La toise carrée vaut en mètres carrés		3,796
Le pied carré vaut en décimètres carrés.		10,545
Le pouce carré vaut en centimètres carrés		7,323
La ligne carrée vaut en millimètres carrés		5,085
La perche carrée de 22 pieds vaut en	are	0,5104
	centiares	51,04
La perche carrée de 18 pieds vaut en	are	0,342
	centiares	34,24
L'arpent des eaux et forêts vaut en	hectare.	0,5138
	ares	51,38

L'arpent à 18 pieds par perche vaut en	hectare.	0,3424
	ares	34,24

MESURES DE SOLIDITÉ.

La toise cube vaut en mètres cubes	7,397
Le pied cube vaut en décimètres cubes	34,243
Le pouce cube vaut en centimètres cubes. . . .	19,817
La ligne cube vaut en millimètres cubes.	11,47
La corde des eaux et forêts vaut en stères. . . .	3,835
La voie de bois ou demi-corde vaut en stère. . .	1,917
La solive vaut en décistère.	1,027

MESURES DE CAPACITÉ *pour les grains et autres matières sèches.*

Le litron vaut en	litre	0,813
	décilitres.	8,13
Le boisseau vaut en décalitre		1,300
Le setier de 12 boisseaux vaut en hectolitre. . .		1,560
Le muid de 12 setiers vaut en kilolitres		1,872
Le minot de 3 boisseaux vaut en décalitres . . .		3,900
La mine de deux minots vaut en décalitres . . .		7,800

MESURES DE CAPACITÉ *pour les liqueurs.*

Le muid de 288 pintes vaut en hectolitres. . . .		2,68
La pinte vaut en.	litre	0,93
	décilitres.	9,30
La chopine vaut en décilitres		4,65
Le demi-setier vaut en décilitres.		2,33
Le poisson vaut en décilitre		1,16

MESURES DE PESANTEUR OU POIDS.

Le millier pesant vaut en myriagrammes	48,9147
Le quintal vaut en myriagrammes.	4,8915
La livre vaut en hectogrammes	4,8915
L'once vaut en décagrammes	3,0572
Le gros vaut en grammes.	3,8215
Le grain vaut en centigrammes	5,308
Le seizième de grain vaut en milligrammes . . .	3,317

TABLE II.ᵉ

Rapports des mesures nouvelles avec les anciennes.

MESURES DE LONGUEUR.

Le mètre vaut en	aune	0,842
	toise	0,5132
Le décimètre vaut en pied.		0,308
Le centimètre vaut en pouce		0,37
Le millimètre vaut en ligne		0,443
Le décamètre vaut en . . .	perche de 18 pieds.	1,711
	perche de 22 pieds.	1,400
Le myriamètre vaut en . .	lieues de 25 au deg.	1,25
	lieue de 20 au degr.	1,80
	lieues moyennes . .	2,00

MESURES DE SUPERFICIE.

Le mètre carré vaut en toise carrée		0,2634
Le décimètre carré vaut en pied carré.		0,0948
Le centimètre carré vaut en pouce carré		0,1365
Le millimètre carré vaut en ligne carrée		0,1966
L'are vaut en	perch. car. de 18 p.	2,927
	perch. car. de 22 p.	1,959
L'hectare vaut en	arpents de Paris . .	2,927
	arp. des eaux et for.	1,959

MESURES DE SOLIDITÉ.

Le mètre cube vaut en. . .	toise cube	0,1352
	solives	9,734
Le décimètre cube vaut en pied cube		0,0292
Le centimètre cube vaut en pouce cube		0,0505
Le millimètre cube vaut en ligne cube.		0,0872
Le stère vaut en	corde des eaux et forêts.	0,261
	voie de bois	0,522

MESURES DE CAPACITÉ.

Le litre vaut en	litron.	1,231
	pinte	1,075

Le décalitre vaut en....	boisseau......	0,769
	setier de 8 pintes. .	1,343
L'hectolitre vaut en....	setier de blé....	0,641
	muid de 288 pintes.	0,373

MESURES DE PESANTEUR OU POIDS.

Le myriagramme vaut en livres..........	20,444
Le kylogramme vaut en livres...........	2,044
L'hectogramme vaut en livre...........	0,2044
Le décagramme vaut en once...........	0,327
Le gramme vaut en gros..............	0,262
Le décigramme vaut en grain...........	1,884.

158. *Remarque*. Les assemblages de plusieurs subdivisions des nouvelles mesures, se présentent sous la forme de nombres complexes ; mais le calcul se rapporte toujours à la numération décimale; il ne faut pour cela que supprimer les caractéristiques des unités inférieures à l'unité principale, et placer la virgule décimale à la suite des unités principales. Un exemple suffira pour ne laisser là-dessus aucune obscurité.

Qu'on propose d'ajouter ensemble les quatre nombres qu'on voit ici, lesquels sont relatifs à des quantités de même espèce, telles que les distances.

mèt.	déci.	cent.	milli.
345	8	9	
2489	7	3	5
500	5	6	
264	6	7	

En prenant le mètre pour l'unité principale, j'écris les nombres proposés, comme on le voit ici. Ensuite je fais l'addition à l'ordinaire, et je trouve, pour somme, 3600,855 mèt. ; laquelle est exprimée en mètres et en parties décimales du mètre. Cette somme pourra s'écrire ainsi : 3600 mètr. 8 décim. 5 centi. 5 millim. ; et alors elle aura la même forme que les nombres dont elle est formée.

	mèt.
	345,89
	2489,735
	500,56
	264,67
Somme.	3600,855

CHAPITRE IX.

De la formation des puissances, et de l'extraction des racines.

159. On appelle *puissances* d'un nombre les produits que l'on trouve en le multipliant par lui-même un certain nombre de fois.

Tout nombre est lui-même sa *première* puissance. Ainsi 4 ou la première puissance de 4, c'est la même chose.

Le *seconde* puissance, ou le *quarré* d'un nombre, est le produit de ce nombre multiplié par lui-même. Ainsi 4×4, ou 16, est la seconde puissance, ou le quarré de 4. De même 6×6, ou 36, est la seconde puissance, ou le quarré de 6. L'usage le plus ordinaire est d'employer, pour plus de brieveté, le mot de *quarré*, préférablement à celui de *seconde puissance.*

La *troisième* puissance, ou le *cube* d'un nombre, est le produit de ce nombre multiplié deux fois de suite par lui-même, c'est-à-dire, le produit du nombre par son quarré. Ainsi, si l'on multiplie 4 par son quarré 16, le produit 64 est la troisième puissance, ou le cube de 4. De même, 216, produit de 6 par son quarré 36, est la troisième puissance, ou le cube de 6. Le mot *cube* est le plus usité.

La *quatrième* puissance d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié trois fois de suite par lui-même, c'est-à-dire, le produit du nombre par son cube. Ainsi 4×64, ou 256, est la quatrième puissance de 4; 6×216, ou 1296, est la quatrième puissance de 6.

Ainsi de suite pour les puissances *cinquième*, *sixième*, etc.

160. L'opération qu'on fait pour trouver une certaine puissance d'un nombre, s'appelle *formation* de cette puissance.

161. On remarquera que toutes les puissances de 1 sont 1; car 1 multiplié par lui-même autant de fois qu'on voudra, ne peut donner que 1. Cette propriété appartient à l'unité exclusivement à tous les autres nombres.

162. Voici une petite table qui contient les quatre premières puissances des nombres, depuis 1 jusqu'à 9 inclusivement.

Nombres. .	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quarrés. . .	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubes. . . .	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4.es Puissances.	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

163. On appelle *racine* d'une puissance le nombre qui, en se multipliant lui-même un certain nombre de fois, produit cette puissance. La racine *première* et la puissance *première* sont la même chose. Mais il en est autrement pour les puissances et les racines des ordres supérieurs au premier. Par rapport à la seconde puissance, le nombre générateur s'appelle *racine seconde*, ou plus ordinairement *racine quarrée*; par rapport à la troisième puissance, le nombre générateur s'appelle *racine troisième*, ou plus ordinairement *racine cube*; ainsi de suite.

164. L'opération qu'on fait pour trouver la racine, quand on connoît la puissance, s'appelle *extraction* de la racine.

165. Ces notions bien entendues, nous pouvons nous proposer à ce sujet les deux questions suivantes, dont l'une est l'inverse de l'autre.

I. *Etant donné un nombre, déterminer telle puissance qu'on voudra de ce nombre.*

II. *Etant donné un nombre que l'on regarde comme une certaine puissance d'un autre nombre, trouver cet autre nombre.*

La première question n'a aucune difficulté ; car il ne s'agit, pour la résoudre, que de multiplier un nombre un certain nombre de fois par lui-même. Qu'on demande, par exemple, la quatrième puissance de 15; je multiplie 15 par 15, le produit est 225 ; je multiplie ce produit par 15, et j'ai 3375 ; je multiplie ce dernier produit par 15, et j'ai 50625, qui est la quatrième puissance cherchée.

Quant à la seconde question, elle est beaucoup plus difficile, et demande, pour être résolue, des règles particulières. Je vais donner ces règles pour les racines quarrée et cube seulement, parce que, dans les usages les plus ordinaires qu'on fait des racines dans l'arithmétique, on n'a besoin que de savoir extraire la racine quarrée et la racine cube ; mais il ne sera pas difficile d'imiter, si l'on veut, les mêmes procédés pour les ordres supérieurs.

SECTION I.

Extraction de la racine quarrée.

166. Suivant l'idée générale que nous avons donnée (164) de l'extraction des racines, l'extraction de la racine quarrée est une opération par laquelle on trouve un nombre qui, multiplié par lui-même, donne, ou le nombre dont il s'agit d'extraire la racine quarrée, ou le plus grand quarré qui y est contenu.

Comme il n'est question ici que de racines quarrées, quand, pour abréger, j'omettrai le mot *quarrée*, on aura soin de le sous-entendre.

167. Lorsqu'un nombre n'est pas exprimé par plus de deux chiffres, sa racine n'en a qu'un ; et elle se trouve par le moyen de la table de l'article 162. Par exemple, demande-t-on la racine de 49? on la trouve dans la première case de la bande verticale qui contient 49 : elle est 7.

Si le nombre, toujours exprimé par deux chiffres tout au plus, dont on demande la racine, n'étoit pas compris dans la table, comme, par exemple, si on demandoit la racine de 88, on prendroit dans la table le nombre le plus approchant, en dessous, de 88 : ce nombre est 81, dont la racine est 9; et cette même racine seroit celle qui, en nombre entier, approche le plus, en dessous, de la véritable racine de 88.

L'extraction de la racine des nombres qui ne sont pas exprimés par plus de deux chiffres, est le fondement de l'extraction des racines des nombres supérieurs que nous allons expliquer.

168. Tout nombre exprimé par plus de deux chiffres en a nécessairement plus d'un à sa racine; car 100, qui est le plus petit des nombres exprimés par plus de deux chiffres, a pour racine 10, qui est exprimé par deux caractères. Ainsi la racine de tout nombre exprimé par plus de deux chiffres, peut être regardée comme composée d'un nombre de dixaines et d'un nombre d'unités, et les dixaines pourront être exprimées par plus d'un chiffre. Voyons comment ces parties de la racine entrent dans la formation du quarré. Quand nous connoîtrons bien comment un quarré est produit, il ne sera pas difficile de découvrir la racine d'un nombre quelconque, ou du moins du plus grand quarré qui y est contenu, supposé que ce nombre ne soit pas un quarré parfait.

169. Je prends, par exemple, le nombre 24, qui est composé de 2 dixaines et de 4 unités, et je l'élève à son quarré, en le multipliant par lui-même, suivant les règles ordinaires de la multiplication. Ainsi je multiplie premièrement 4 par 4; secondement 2 par 4; troisièmement 4 par 2 ou 2 par 4; quatrièmement 2 par 2. Or, il est visible que par la première multiplication on fait le quarré des unités; par la seconde, le produit des dixaines par les unités; par la troisième, encore le produit des dixaines par les unités; par la quatrième, le quarré des dixaines. Il en sera

	24
	24
	96
	48
Quarré	576

de même pour tout autre nombre composé de dixaines et d'unités. D'où je conclus que le quarré d'un nombre composé de dixaines et d'unités, contient, 1.° *le quarré des dixaines*; 2.° *deux fois le produit des dixaines par les unités, ou, ce qui revient au même, le double des dixaines multiplié par les unités*; 3.° *le quarré des unités*. Dans ce résumé les parties ne sont pas énoncées tout-à-fait dans le même ordre qu'on les a trouvées; mais les deux résultats reviennent au même.

Maintenant venons à l'extraction des racines quarrées, qui est le problême inverse du précédent.

170. Problême. *Trouver la racine quarrée d'un nombre donné.*

Les préceptes généraux seroient difficiles à entendre en eux-mêmes; ils naîtront sans peine des opérations que nous allons faire sur des exemples.

171. Exemple I. *Extraire la racine quarrée du nombre 3458, ou du plus grand quarré contenu dans ce nombre s'il n'est pas un quarré parfait.*

Le nombre 3458 étant composé de plus de deux chiffres, sa racine en a nécessairement plus d'un (168); elle a donc des dixaines et des unités. Sans connoître ces dixaines et ces unités, nous sommes sûrs (169) que le quarré contient le quarré des dixaines de la racine, plus deux fois le produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités. Or, le quarré des dixaines, étant un produit de dixaines par des dixaines, est un nombre de centaines qui a deux rangs à sa droite. Ainsi, si dans le nombre 3458, je sépare par une petite barre verticale les deux derniers chiffres vers la droite, en cette sorte, 34|58, je serai sûr que le quarré des dixaines de la racine est contenu dans la partie 34. Et comme cette partie n'a que deux chiffres, j'en trouverai la racine, au moins approchée en dessous, à l'aide de la table de l'art. 162. Mettons nos calculs en ordre. Après l'accolade qui accompagne

quar. sup.	34|58	58 racine.
	25	1ø8
	958	
	864	
	94	

notre nombre, je tire une barre horizontale, au dessus de laquelle j'écris les chiffres de la racine à mesure que je les trouve.

La table citée me fait voir que 34 n'est pas un quarré parfait, et que le plus grand quarré contenu dans ce nombre est 25, dont la racine est 5. J'écris donc 5 à la racine, et le quarré 25 sous 34. Le chiffre 5 exprime les dixaines de la racine du nombre total 3458. Retranchant 25 de 34, reste 9, à côté duquel j'abaisse la tranche 58; ce qui donne le nombre 958.

Puisque du nombre proposé 3458 nous avons retranché le quarré 25 des dixaines de sa racine, il est clair que le nombre restant 958 doit contenir le double produit des dixaines par les unités inconnues de la racine, plus le quarré des mêmes unités. Or, de ces deux dernières parties, la première, c'est-à-dire, le double produit des dixaines par les unités, est nécessairement un nombre de dixaines. Donc ce nombre est contenu dans les deux premiers chiffres de la gauche du nombre 958, c'est-à-dire, dans 95. J'écris sous la barre 10, qui est le double des dixaines 5, et j'observe qu'en divisant 95 par 10, on aura évidemment au quotient le nombre des unités qu'on cherche. Or le quotient de 95, divisé par 10, est 9. Mais, avant que d'écrire ce chiffre à la racine, il faut le soumettre à l'épreuve. Cette épreuve peut se faire de la manière suivante :

A côté de 10 écrivez 9; vous aurez ainsi le nombre 109, que vous multiplierez par 9. Il est clair que, par cette multiplication, vous ferez tout-à-la-fois le quarré des unités et le double produit des dixaines par les unités. Donc, si le produit de 109 par 9 peut être retranché de 958, le chiffre 9 pourra être écrit à la racine. Or, on trouve que le produit de 109 par 9 est plus grand que 958: donc le chiffre 9 est trop grand. On éprouvera le chiffre immédiatement inférieur 8, en écrivant ce chiffre à côté de 10, et multipliant 108 par 8: le produit est 864, qui peut être retranché de 958; le reste est 94. Ce reste est l'excès du nombre 3458 sur le quarré de 58.

Toutes les fois qu'on trouve ainsi un reste, autre que zéro, c'est une marque que le nombre proposé pour en extraire la racine quarrée, n'est pas un quarré parfait.

172. Exemple II. *Extraire la racine du nombre 3745945, où, s'il n'est pas un quarré parfait, du plus grand quarré qui y est contenu.*

quarré sup.	3|74|59|45	1935 rac.
	274	29
	1359	383
	21045	3868
	1720	

Ayant tout disposé comme dans le premier exemple, et comme on le voit ici, je considère deux parties dans la racine inconnue qu'on demande : un nombre de dixaines, qui sera exprimé lui-même par plus d'un chiffre ; et un nombre d'unités, qui est toujours exprimé par un seul chiffre. Le quarré total contiendra donc le quarré des dixaines de la racine, plus le double produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités. Partageons en différents membres l'opération que nous avons à faire pour trouver les dixaines et les unités de cette racine.

I.

Comme le quarré des dixaines est un nombre de centaines, et qu'il a par conséquent deux places à sa droite, il sera compris dans la partie 37459 qui est à gauche de la première barre verticale. Ainsi, pour avoir les dixaines de la racine du nombre proposé 3745945, il faut tirer la racine du nombre 37459, en faisant abstraction de la dernière partie 45.

II.

Le nombre 37459 étant exprimé par plus de deux chiffres, sa racine a nécessairement des dixaines et des unités. Or, le quarré des dixaines, ayant deux places à sa droite, sera compris dans la partie 374 située à gauche de la seconde barre verticale. Tirons donc la racine de 374 comme si les chiffres qui accompagnent ce nombre à droite n'existoient pas.

III.

Le nombre 374 a encore des dixaines et des unités à sa racine: et le quarré des dixaines est compris dans le chiffre 3, situé à gauche de la troisième barre verticale. La racine de ce nombre 374 se trouve comme dans le premier exemple. De 3 ôtant 1 qui est le plus grand quarré contenu dans 3, reste 2, à côté duquel j'abaisse la tranche suivante 74. Je divise 27 par 2, double des dixaines, le quotient est 13; mais on ne peut pas mettre plus de 9 à la racine, autrement on auroit pu mettre plus de 1 pour le premier chiffre. On écrira donc 9 à la racine, et à côté 2, double des dixaines; ensuite on éprouvera ce chiffre, comme il a été expliqué. Ayant trouvé que 9 n'est pas trop grand pour être le nombre des unités de la racine, on multipliera à l'ordinaire 29 par 9, et on soustraira en même temps le produit, de 274, le reste est 13.

IV.

A côté de ce reste j'abaisse la tranche suivante 59; et regardant 19 comme les dixaines de la racine de 37459: de plus, considérant que par l'opération précédente je viens de retrancher le quarré de 19 de la partie 374, il est évident que le reste 1359 contient le double produit des dixaines 19 par le nombre inconnu des unités, plus le quarré des unités. Or, le double produit des dixaines par les unités a une place à sa droite; il est donc contenu dans 135. Divisant 135 par 38, double de 19, on aura au quotient les unités qu'on demande. Ce quotient est 3; on mettra ce chiffre à la racine, et à côté de 38; on trouvera, par l'épreuve, qu'il n'est pas trop grand. Ensuite, on multipliera, à l'ordinaire, 383 par 3; et on soustraira en même temps le produit de 1359; le reste est 210.

V.

A côté de ce reste, j'abaisse la dernière tranche 45. Je regarde 193 comme les dixaines de la racine du nombre proposé 3745945; et comme, par les opérations précédentes, j'ai retranché le quarré de ces dixaines de la partie

37459, il est clair que le reste 21045 contient le double produit des dixaines 193 par le nombre inconnu des unités, plus le quarré des unités. Le premier de ces deux produits a une place à sa droite; il est donc compris dans 2104. Divisant ce nombre par 386, double de 193, le quotient sera les unités de la racine. L'épreuve fait voir qu'on ne peut pas mettre plus de 5 à la racine. J'écris donc 5 à la racine, et à côté de 386; je multiplie 3865 par 5, et je soustrais en même temps le produit de 21045 : le reste est 1720, excès du nombre proposé 3745945 sur le quarré de 1935.

On voit par ce second exemple que l'extraction des racines des nombres exprimés par plus de quatre chiffres n'a pas d'autres difficultés que celle des nombres qui n'en ont que trois ou quatre. Quel que soit le nombre dont on propose d'extraire la racine, les chiffres de cette racine se trouvent successivement par des extractions partielles qui se font absolument de la même manière que si la racine ne devoit être composée que de deux chiffres.

173. *Scholie I.* Lorsqu'un nombre n'est pas un quarré parfait, ou qu'il n'a pas de racine exactement exprimable en nombres entiers, on peut, à l'aide des parties décimales, déterminer une racine qui ne diffère pas de la véritable d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra. Pour cela, on mettra une virgule à la droite du nombre proposé, et à la suite de cette virgule deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de chiffres décimaux à la racine. Je dis *deux fois autant*, parce qu'un nombre qui contient des parties décimales, étant multiplié par lui-même, donne un produit ou un quarré qui contient (63) deux fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a à la racine. Cette préparation faite, on tirera la racine comme s'il n'y avoit pas de virgule; et, quand cette racine sera trouvée, on séparera vers la droite un nombre de chiffres décimaux égal à la moitié du nombre de zéros écrits à la droite du nombre donné.

174. Exemple. *On demande la racine de 57, à moins d'un millième près.*

Suivant les conditions de la question, la racine doit contenir des millièmes, et par conséquent trois chiffres décimaux. Ainsi je mets six zéros à la droite de 57, et je me propose d'extraire la racine de 57,000000, ou, en supprimant la virgule, de 57000000.

quar. sup.	57|00|00|00	7549 racine.
	800	145
	7500	1504
	148400	15089
	12599	

Je trouve, par la méthode exposée ci-dessus, que cette racine est 7549, et que le reste de l'opération est 12599. Mais la racine 7549 est 1000 fois trop grande, puisqu'elle est celle d'un nombre 1000000 plus grand que 57 : il faut donc la rendre 1000 fois plus petite; ce qui se fait en y séparant trois chiffres décimaux par une virgule. Par ce moyen, on aura 7,549 pour la racine de 57, approchée à moins d'un millième; car on n'auroit pas pu ajouter une unité au nombre 7549, sans le rendre trop grand pour être la racine de 57000000.

175. *Scholie II.* Si le nombre dont on propose de trouver la racine approchée contenoit déjà des chiffres décimaux, on ne mettroit à sa droite qu'un nombre de zéros suffisant pour avoir au quarré deux fois autant de chiffres décimaux qu'on veut en avoir à la racine. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'extraire la racine de 57,3, à moins d'un millième près, on ne mettra que cinq zéros à la droite de ce nombre : ensuite on tirera la racine de 57300000; et, après l'avoir trouvée, on y séparera trois chiffres décimaux vers la droite. Toutes ces opérations donnent 7,569 pour la racine approchée de 57,3.

Dans tous les cas, le nombre de chiffres décimaux du quarré vrai ou supposé doit être pair, et double de celui de la racine.

176. *Scholie III.* En suivant ce principe, on trouve avec la même facilité la racine des nombres qui ne contiennent que des parties décimales. Tels sont les nombres 0,457;

0,03345. Si on veut avoir la racine du premier, à moins d'un millième près, on l'écrira ainsi, 0,457000; et on tirera la racine, comme si le nombre étoit 457000. La racine approchée de ce dernier nombre est 676; et par conséquent 0,676 est, à moins d'un millième près, la racine du nombre donné 0,457. De même, pour avoir la racine de 0,03345, à moins d'un dix-millième près, on écrira ce nombre ainsi, 0,03345000; et on opérera comme si le nombre étoit 3345000. La racine approchée de ce dernier nombre est 1828; et par conséquent la racine du nombre proposé 0,03345 est 0,1828, à moins d'un dix-millième près.

Extraction des Racines quarrées des Fractions.

177. Nous avons vu (110) que, pour multiplier une fraction par une autre, il faut multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur. Par conséquent le quarré d'une fraction, ou le produit de cette fraction multipliée par elle-même, est une fraction qui a pour numérateur le quarré du numérateur de la fraction proposée, et pour dénominateur le quarré du dénominateur de la même fraction. Donc réciproquement, pour avoir la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer la racine du numérateur et celle du dénominateur, et faire une fraction qui ait pour numérateur la première racine, et pour dénominateur la seconde. Ainsi, par exemple, la racine de la fraction $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$; la racine de la fraction $\frac{49}{64}$ est $\frac{7}{8}$.

178. Il peut arriver que le dénominateur soit ou ne soit pas un quarré parfait; ce qui fait deux cas. Nous ne faisons pas de division relativement au numérateur, parce que l'espèce de la fraction est déterminée par le dénominateur, et qu'il est à propos de régler les unités de la fraction racine sur celles de la fraction quarrée. Examinons séparément les deux cas proposés.

179. I. cas. *Tirer la racine quarrée d'une fraction, lorsque le dénominateur est un quarré parfait.*

Tirez la racine du numérateur, ou du plus grand quarré

qui y est contenu, et celle du dénominateur : la fraction qui aura pour termes ces deux racines, sera, ou la racine exacte demandée, ou n'en différera pas d'une unité fractionnaire de même dénomination qu'elle. Soit, par exemple, la fraction $\frac{43}{64}$, dont le dénominateur est un quarré parfait, et dont le numérateur n'en est pas un. Je prends la racine 6 de 36 qui est le plus grand quarré contenu dans le numérateur 43, et la racine exacte 8 du dénominateur 64; et je forme la fraction $\frac{6}{8}$, qui ne diffère pas de $\frac{1}{8}$ de la vraie racine de $\frac{43}{64}$; car, si à $\frac{6}{8}$ on ajoutoit $\frac{1}{8}$, on auroit $\frac{7}{8}$, dont le quarré $\frac{49}{64}$ surpasse la fraction $\frac{43}{64}$.

On peut approcher, aussi près qu'on voudra, de la vraie racine du numérateur par le moyen des parties décimales. Ainsi, tirant la racine quarrée de 43, à moins d'un millième près, on aura $\frac{6,557}{8}$ pour la racine approchée de $\frac{43}{64}$. Si on veut avoir seulement une fraction décimale à la racine, on divisera le numérateur par le dénominateur, et on trouvera 0,819 pour cette racine.

180. II. cas. *Tirer la racine quarrée lorsque le dénominateur n'est pas un quarré parfait.*

Multipliez le numérateur et le dénominateur de la fraction par le dénominateur : vous changerez cette fraction en une autre de même valeur (100), et dont le dénominateur est un quarré parfait, ce qui revient au premier cas. Ainsi vous opérerez sur la nouvelle fraction comme on vient de l'expliquer. Soit, par exemple, la fraction $\frac{5}{11}$ dont on demande la racine. Je multiplie le numérateur et le dénominateur par le dénominateur 11 ; ce qui donne $\frac{55}{121}$, dont $\frac{7}{11}$ est la racine, à moins de $\frac{1}{11}$ près.

En employant l'approximation des parties décimales, et la poussant jusqu'aux millièmes, on trouve que la racine approchée de 55 est 7,416. Ainsi la racine de la fraction $\frac{5}{11}$ ou $\frac{55}{121}$ est $\frac{7,416}{11}$, ou 0,674.

181. *Scholie I.* Les racines des nombres composés d'entiers et de fractions se trouvent, en réduisant ces nombres, tout-à-fait en fractions. Par exemple, soit le nombre $65\frac{43}{47}$,

qui est composé de l'entier 65 et de la fraction $\frac{43}{47}$. Je réduis l'entier en une fraction qui ait 47 pour dénominateur; ce qui se fait (103) en multipliant 65 par 47, faisant une fraction qui ait ce produit pour numérateur et 47 pour dénominateur. Cette fraction est $\frac{3055}{47}$; en sorte que le nombre proposé 65 $\frac{43}{47}$ est la même chose que $\frac{3055}{47} + \frac{43}{47}$, ou $\frac{3098}{47}$. La question est donc réduite à tirer la racine de la fraction $\frac{3098}{47}$; extraction qui se fait par l'article précédent.

182. *Scholie II.* Quelquefois, lorsqu'un nombre entier n'est pas un quarré parfait, on veut du moins déterminer sa racine à moins d'une unité fractionnaire d'une espèce *donnée*. Je m'explique par un exemple. Soit le nombre 3 qui n'est pas un quarré parfait, et dont on demande la racine, à moins de $\frac{1}{15}$ près. Cette question se résout par l'article 179. Je convertis le nombre 3 en une fraction qui ait le quarré de 15 pour dénominateur; c'est-à-dire qu'après avoir multiplié 15 par 15, ce qui donne 225, je réduis 3 en une fraction qui ait 225 pour dénominateur. Cette fraction est $\frac{675}{225}$. J'en tire la racine approchée, et je trouve la fraction $\frac{25}{15}$ qui est moindre que la vraie racine, mais qui n'en diffère pas de $\frac{1}{15}$. La fraction $\frac{26}{15}$ est un peu plus grande que la vraie racine, mais en approche beaucoup plus que $\frac{25}{15}$.

183. *Scholie III.* Il n'y a point de méthode aussi simple et aussi commode pour approcher de la racine d'une fraction dont les termes ne sont pas des quarrés parfaits, que d'employer les parties décimales. Cette approximation peut être faite un peu autrement que nous ne l'avons prescrit (179 et 180). Voici ce nouveau moyen, lequel comprend tout-à-la-fois les deux cas.

La fraction n'étant pas un quarré parfait, par le défaut de l'un de ses termes ou de tous les deux, commencez par diviser le numérateur par le dénominateur, et poussez la division en parties décimales jusqu'à ce que vous ayez au quotient deux fois autant de chiffres décimaux que vous voulez en avoir à la racine. Ensuite tirez la racine de ce quotient, comme s'il n'avoit pas de chiffres décimaux; et quand vous l'aurez trouvée, séparez vers la droite, par

une virgule, un nombre de chiffres décimaux égal à la moitié de celui du quotient qui exprime la valeur de la fraction proposée. Ainsi, ayant la fraction $\frac{5}{9}$, dont on veut exprimer la racine approchée avec trois décimales; je divise 5 par 9 avec six décimales, c'est-à-dire, que je convertis 5 en 5,000000; le quotient de ce nombre divisé par 9 est 0,555555, dont la racine approchée est 0,745.

SECTION II.

Extraction de la racine cube.

184. Extraire la racine cube d'un nombre, c'est trouver un nombre qui, multiplié par son quarré, produise ou le nombre même dont on propose d'extraire la racine, ou le plus grand cube qui y est contenu.

185. La racine cube des nombres qui ne sont pas exprimés par plus de trois chiffres se trouve par le moyen de la table de l'article 162. Il ne s'agit ici que de l'extraction de la racine cube des nombres exprimés par plus de trois chiffres.

186. Tout nombre exprimé par plus de trois chiffres en a nécessairement plus d'un à sa racine cube; car 1000, qui est le plus petit des nombres exprimés par plus de trois chiffres, a pour racine cube 10, qui est exprimé par deux chiffres. Donc, en général la racine cube de tout nombre exprimé par plus de trois chiffres peut être regardée comme composée de dixaines et d'unités.

187. Nous avons vu (169) que le quarré d'un nombre composé de dixaines et d'unités contient le quarré des dixaines, *plus* le double produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités. Ainsi, pour former le cube du même nombre, il faut multiplier chacune des trois parties dont nous venons de parler par les dixaines et par les unités; ce qui donnera évidemment les six produits suivants :

1.° Le quarré des dixaines multiplié par les dixaines; ou le cube des dixaines.

2.° Le double produit des dixaines et des unités, par les dixaines; ou le double produit du quarré des dixaines par les unités.

3.° Le quarré des unités par les dixaines.

4.° Le quarré des dixaines par les unités.

5.° Le double produit des dixaines et des unités, par les unités; ou le double produit du quarré des unités, par les dixaines.

6.° Le quarré des unités par les unités; ou le cube des unités.

Rassemblons toutes ces parties du cube, et ne faisons qu'une même somme de celles de même espèce; nous verrons que le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités contient *le cube des dixaines*; *plus trois fois le quarré des dixaines, multiplié par les unités*; *plus trois fois le quarré des unités, multiplié par les dixaines*; *plus le cube des unités*. Par exemple, le cube de 24 est composé des parties qu'on voit ici :

8. . .	cube des dixaines.
48. .	triple du quarré des dixaines, par les unités.
96.	triple du quarré des unités, par les dixaines.
64	cube des unités.
Somme 13824	cube de 24.

La première partie du cube exprime des mille, et a trois places à sa droite : la seconde, des centaines, et a deux places; la troisième des dixaines, et a une place; la quatrième, des unités, et ne laisse point de place à sa droite. Il est clair que, par cette manière de former le cube, on ne fait que développer le calcul par lequel on auroit trouvé le nombre 13824, en multipliant à l'ordinaire 24 par 24, et ensuite le produit résultant, par 24.

188. Problème. *Extraire la racine cube d'un nombre, ou du plus grand cube qui y est contenu, si ce nombre n'est pas un cube parfait.*

J'opère sur des exemples, pour plus de clarté.

189. Exemple I. *Extraire la racine cube de 34|567, ou du plus grand cube contenu dans ce nombre.*

Cube supposé.	34|567	32 racine cube.
	27	27
	7567	
	5768	
	1799	

Le nombre 34567 étant composé de plus de trois chiffres, sa racine cube en a nécessairement plus d'un (186); elle a donc des dixaines et des unités; et le nombre proposé contient le cube des dixaines de la racine; plus trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités; plus trois fois le quarré des unités multiplié par les dixaines; plus enfin le cube des unités. Pour avoir la partie du nombre qui contient le cube des dixaines de la racine, je sépare, par une petite barre verticale, les trois derniers chiffres, et je vois que le cube des dixaines est contenu dans 34.

Cela posé, suivant la table de l'article 162, le plus grand cube contenu dans 34 est 27, dont la racine cube est 3, que j'écris après le crochet, et au dessus de la barre qui répond au milieu de ce crochet. Retranchant le cube 27 de 34 il reste 7.

A côté de 7, j'abaisse la tranche 567, et j'ai le nombre 7567, lequel doit contenir le triple du quarré des dixaines 3 que nous venons de trouver, multiplié par les unités que nous cherchons; plus le triple de ces mêmes dixaines, multiplié par le quarré des unités; plus le cube des unités. Or, le triple du quarré des dixaines, multiplié par les unités, doit avoir deux places à sa droite; ce produit est donc contenu dans 75. Alors, pour avoir les unités, je divise 75 par 27, triple du quarré des dixaines; il vient au quotient 2 que j'écris à la suite des dixaines 3. La racine cube du nombre proposé, ou du moins du plus grand cube contenu dans ce nombre, est donc 32, supposé que le chiffre 2 écrit à la racine ne soit pas trop grand.

Pour éprouver ce chiffre, je fais à part les trois produits qui doivent se trouver dans le nombre 7567, c'est-à-dire, le triple du quarré des dixaines 3 par les unités 2, qui est 5400; le triple du quarré des unités par les dixaines, qui est 360; enfin le cube des unités qui est 8. J'ajoute en-

semble ces trois produits; et comme leur somme 5768 est moindre que 7567, je conclus que le chiffre 2 est bon; et, en retranchant 5768 de 7567, je vois que le nombre proposé 34567 surpasse le cube de 32, de 1799.

Lorsqu'on a eu trouvé la racine 32, on auroit pu la cuber; et, en retranchant son cube 32768 de 34567, on auroit trouvé également le reste 1799. Mais il y a un petit avantage, dans la pratique, à faire à part les trois produits dont nous avons parlé. On voit par leur moyen, sans beaucoup de tentatives, si le chiffre des unités de la racine, tel que la division le donne, n'est pas trop grand. En cas qu'il le fût, on le diminueroit d'une unité, jusqu'à ce qu'on en trouvât un qui fût convenable.

190. Exemple II. *Extraire la racine cube du nombre 94897584, ou du plus grand cube qui y est contenu.*

L'opération est indiquée ici; exposons-en le procédé, par parties.

Cube supposé. 94|897|584 { 456 racine cube.
64 { 48
30897
27125 ~~6078~~
3772584
3693816
78768

I.

Le nombre 94897584 étant exprimé par plus de trois chiffres, sa racine cube en a plus d'un, et contient par conséquent des dixaines qui peuvent elles-mêmes être exprimées par plus d'un chiffre, et des unités qui sont toujours exprimées par un seul chiffre. Séparons par une petite barre verticale les trois derniers chiffres vers la droite, et nous serons sûrs que le cube des dixaines de la racine est contenu dans le nombre 94897, qui reste à gauche. J'opère sur ce nombre comme s'il existoit seul, et je fais abstraction, pour un moment, de la tranche 584.

II.

Comme le nombre 94897 est encore exprimé par plus de trois chiffres, sa racine en a plus d'un, et contient des

dixaines et des unités. Séparons vers la droite les trois derniers chiffres; il nous restera à gauche le nombre 94, qui contient le cube des dixaines de la racine du nombre partiel 94897. On continueroit le même partage en tranches de trois chiffres, en allant toujours de droite à gauche, si le nombre dont on propose d'extraire la racine cube avoit un plus grand nombre de caractères.

Suivant la table de l'article 162, le plus grand cube contenu dans le nombre 94 est 64, dont la racine cube est 4; que j'écris à la droite du crochet. Je retranche le cube 64, de 94; et à côté du reste 30, j'abaisse la tranche 897. Par là j'ai le nombre 30897, lequel doit contenir le triple du quarré des dixaines 4, multiplié par les unités inconnues; plus le triple du quarré des unités, par les dixaines; plus le cube des unités. Le premier de ces trois produits doit avoir deux rangs de chiffres à sa droite, et se trouve, par conséquent, dans le nombre 308. Ainsi, pour avoir les unités de la racine cube du nombre 94897, je divise 308 par 48, triple du quarré des dixaines 4; le quotient est 6. Mais, en faisant les trois produits que je viens d'indiquer, je trouve que leur somme surpasse 30897. D'où je conclus que le chiffre 6 est trop grand pour pouvoir être mis à la racine. J'éprouve le nombre 5, et je vois qu'il est bon; car le triple du quarré des dixaines par 5 est 24000; le triple du quarré des unités par les dixaines est 3000; le cube des unités est 125; la somme de ces trois nombres est 27125, qui est moindre que 30897. Je retranche 27125 de 30897; il reste 3772. D'où il suit que le nombre 94897 surpasse le cube de 45, de 3772.

111.

Maintenant, je reprends la dernière tranche 584 qu'on avoit d'abord mise à l'écart; je l'abaisse à côté de 3772, et j'ai le nombre 3772584. En considérant 45 comme les dixaines de la racine du nombre total 94897584, le nombre 3772584 doit contenir le triple du quarré de ces dixaines par les unités qu'on cherche; plus le triple du quarré des unités par les mêmes dixaines; plus enfin le cube des

unités. Le premier produit doit avoir deux rangs de chiffres à sa droite; il est donc contenu dans 37725. Divisant ce nombre par 6075, triple du quarré des dixaines 45, il viendra 6 au quotient. Je fais le produit de 6075 par 6, qui est 3645000; plus le produit de 45 par 108, triple du quarré de 6, qui est 48600; enfin le cube de 6, qui est 216. J'ajoute ensemble ces trois nombres; la somme est 3693816, qui, étant retranchée de 3772584, donne 78768 pour reste. L'opération est achevée. On voit que 456 est la racine du plus grand cube contenu dans le nombre 94897584, et que ce même nombre surpasse le cube de 456, de 78768.

191. *Scholie I.* Lorsqu'un nombre n'est pas un cube parfait, et qu'on veut approcher de sa racine cube par le moyen des parties décimales, il faut mettre à sa droite une virgule, et après la virgule trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine; tirer ensuite la racine cube comme s'il n'y avoit pas de virgule, et quand elle est trouvée, y séparer vers la droite, par une virgule, un nombre de chiffres décimaux égal au tiers du nombre des zéros qui accompagnent la virgule dans le cube. Il y a donc ainsi trois fois plus de parties décimales au cube qu'à la racine cube. En effet, le cube d'un nombre qui contient des dixièmes a trois figures décimales, puisque les trois facteurs de ce cube ont chacun une figure décimale; le cube d'un nombre qui contient deux figures décimales doit avoir six chiffres décimaux, puisque chaque facteur de ce cube a deux figures décimales; ainsi de suite.

192. Exemple. *Extraire la racine cube de 57, qui n'est pas un cube parfait, et faire en sorte qu'elle ne diffère pas de la vraie racine, d'un millième.*

Puisque la racine cube cherchée doit contenir des millièmes, et par conséquent trois figures décimales, le cube doit avoir neuf figures décimales. Ainsi, au lieu de 57, j'écris 57,000000000 qui est au fond la même chose. Ensuite supprimant la virgule, j'extrais, par les règles précédentes, la racine cube du nombre 57000000000; elle est 3848, à moins d'une unité près. Mais comme 57000000000

est 1000000000 fois plus grand que 57, le nombre 3848 est 1000 fois plus grand que la racine cube de 57. Il faut donc le rendre 1000 fois plus petit; c'est ce qu'on fera en écrivant 3,848 qui ne diffère pas de la racine cube de 57, d'un millième.

193. *Scholie II.* Si le nombre dont on propose de trouver la racine cube approchée contenoit déja des chiffres décimaux, on ne mettroit à sa droite qu'un nombre de zéros suffisant pour avoir au cube trois fois autant de chiffres décimaux qu'on veut en avoir à la racine. Ainsi, s'il s'agit, par exemple, d'extraire la racine cube de 57,3, à moins d'un millième près, on ne mettra que huit zéros à la suite de ce nombre. Ensuite on tirera la racine cube de 57300000000; elle est 3855 à moins d'une unité près. Séparant trois chiffres vers la droite par une virgule, on aura, à moins d'un millième près, 3,855 pour la racine cube du nombre proposé 57,3.

194. *Scholie III.* S'il falloit extraire la racine cube d'un nombre tel que 0,045, qui ne contient que des parties décimales, et qu'on demandât cette racine à moins d'un centième près, on mettroit trois zéros à la suite du nombre proposé, et on commenceroit par tirer la racine cube de 45000; elle est 35; à moins d'une unité près. Séparant dans ce nombre 35 deux chiffres vers la droite par une virgule, on aura, à moins d'un centième près, 0,35, pour la racine cube du nombre proposé 0,045.

Extraction des racines cubes des fractions.

195. Il suit des principes sur la multiplication et la nature des fractions, que le cube d'une fraction est égal au cube du numérateur, divisé par le cube du dénominateur. Donc réciproquement la racine cube d'une fraction est la racine cube du numérateur, divisée par la racine cube du dénominateur. Par exemple, la racine cube de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$; celle de $\frac{343}{729}$ est $\frac{7}{9}$.

196. A l'imitation de ce que nous avons dit (178) au sujet de la racine quarrée des fractions, distinguons de même

deux cas pour les racines cubes des fractions ; l'un où le dénominateur est un cube parfait, l'autre où il n'en est pas un.

197. I. cas. *Tirer la racine cube d'une fraction, lorsque le dénominateur est un cube parfait.*

Il faut tirer la racine cube exacte ou approchée du numérateur, et celle du dénominateur. La fraction qui aura pour numérateur la première racine, et pour dénominateur la seconde, sera la racine demandée. Soit, par exemple, la fraction $\frac{458}{512}$, dont il s'agit d'extraire la racine cube. Je prends la racine 7 de 343 qui est le plus grand cube contenu dans le numérateur 458, et la racine exacte 8 du dénominateur 512 ; je forme la fraction $\frac{7}{8}$ qui n'est pas la racine exacte de $\frac{458}{512}$, mais qui n'en diffère pas de $\frac{1}{8}$, c'est-à-dire d'une unité fractionnaire de même dénomination qu'elle.

On peut approcher aussi près qu'on voudra de la vraie racine du numérateur, par le moyen des parties décimales. Ainsi, tirant la racine cube de 458 à moins d'un millième près, on aura $\frac{7{,}708}{8}$ pour la racine approchée de $\frac{458}{512}$. Si on ne veut avoir qu'une fraction décimale à la racine, on divisera le numérateur 7,708 par 8, et on aura 0,963 pour la racine approchée.

198. II cas. *Tirer la racine cube d'une fraction lorsque le dénominateur n'est pas un cube parfait.*

Multipliez le numérateur et le dénominateur par le quarré du dénominateur ; vous ne changerez pas (100) la valeur de la fraction, et vous en aurez une autre dont le dénominateur est un cube parfait, ce qui revient au cas précédent. Soit, par exemple, la fraction $\frac{5}{9}$ dont on demande la racine cube, et dont le dénominateur n'est pas un cube parfait. Je multiplie numérateur et dénominateur par 81, quarré de 9, et j'ai la fraction $\frac{405}{729}$. Prenant la racine cube approchée 7 du numérateur, et la racine cube exacte 9 du dénominateur, je forme la fraction $\frac{7}{9}$ qui ne diffère pas de $\frac{1}{9}$ de la vraie racine cube de $\frac{5}{8}$.

On approchera davantage, si l'on veut, de la vraie racine, en employant les parties décimales comme dans le cas précédent.

199. *Scholie I.* Si on proposoit d'extraire la racine cube d'un nombre composé d'un entier et d'une fraction, on commenceroit par réduire (103) l'entier en une fraction de même dénominateur que celle dont il est accompagné; ensuite, après avoir ajouté ensemble ces deux fractions, on tireroit la racine cube de la somme comme on vient de l'expliquer. Par exemple, qu'il s'agisse de tirer la racine cube du nombre $4\frac{2}{9}$: je réduis l'entier 4 en une fraction qui ait 9 pour dénominateur. Par ce moyen, le nombre $4\frac{2}{9}$ devient $\frac{36}{9} + \frac{2}{9}$, c'est-à-dire $\frac{38}{9}$. La question est donc réduite à tirer la racine cube de $\frac{38}{9}$, ce qui se rapporte à l'article précédent.

200. *Scholie II.* Quand un nombre entier n'est pas un cube parfait, et qu'on veut avoir sa racine cube à moins d'une unité fractionnaire *donnée* près, il faut convertir ce nombre en une fraction qui ait pour dénominateur le cube du nombre qui est le dénominateur de l'unité fractionnaire donnée. Par ce moyen, l'opération est réduite au premier cas. Soit, par exemple, le nombre 3 qui n'est pas un cube parfait, et dont on veut avoir la racine cube, à moins de $\frac{1}{15}$ près; je convertis 3 en une fraction qui ait le cube de 15 pour dénominateur. Cette fraction est $\frac{10125}{3375}$ dont la racine approchée est $\frac{21}{15}$ ou $\frac{7}{5}$, qui ne diffère pas de $\frac{1}{15}$ de la vraie racine de 3.

201. *Scholie III.* Nous avons indiqué (198 et 199) le moyen d'approcher, en parties décimales, de la racine cube des fractions dont les deux termes ne sont pas des cubes parfaits. Voici une autre manière, plus simple dans la pratique, pour parvenir au même but.

Divisez le numérateur par le dénominateur, et poussez l'opération, en parties décimales, jusqu'à ce que vous ayez au quotient trois fois autant de chiffres décimaux que vous voulez en avoir à la racine. Tirez la racine cube de ce quotient, comme s'il n'avoit pas de parties décimales, et quand

vous l'aurez trouvée, séparez-y vers la droite un nombre de chiffres décimaux égal au tiers de celui des chiffres décimaux du cube. Ainsi, par exemple, ayant la fraction $\frac{5}{9}$ dont on demande la racine cube avec trois figures décimales, je l'écris ainsi $\frac{5,000000000}{9}$, et en effectuant la division, elle devient 0,555555555, dont la racine cube approchée est 0,822.

Il est clair que comme on est maître de pousser aussi loin qu'on voudra la division par les parties décimales, on est aussi maître d'approcher aussi près qu'on voudra de la vraie racine cube des fractions dont les termes ne sont pas des cubes parfaits.

CHAPITRE X.

Des Règles d'Alliage.

202. Nous avons exposé jusqu'ici les opérations fondamentales de l'arithmétique. Ces opérations combinées ensemble en produisent d'autres que les besoins de la société, ou les usages de l'arithmétique dans les différentes branches de mathématiques, ont fait imaginer. Telle est la règle d'*alliage*. On trouvera dans le chapitre suivant plusieurs autres opérations composées, comme la *règle de trois*, la *règle de compagnie*, la *règle d'escompte*, etc.

203. On appelle *alliage* un mélange que l'on fait d'un certain nombre de choses de différentes valeurs pour former un tout d'un même nombre de parties égales entre elles et d'une valeur moyenne. La règle d'alliage sert à trouver, ou cette valeur moyenne de l'une des parties du mélange quand on connoît la valeur et le nombre des choses dont il est composé, ou le nombre des parties des choses qui doivent être alliées, quand on connoît la valeur de chacune de ces parties et celle du mélange. Cet énoncé renferme, comme on voit, deux questions.

204. Problème I. *Trouver la valeur de l'unité du mélange, lorsqu'on connoît le nombre et la valeur des choses dont il doit être composé.*

Multipliez le nombre des choses de chaque espèce par la valeur de l'unité de chaque chose, additionnez ensemble tous ces produits, et divisez la somme par le nombre total des choses alliées : le quotient sera la valeur de l'unité du mélange.

205. Exemple I. *Mêler ensemble 300 bouteilles de vin à 25^s la bouteille, 200 bouteilles à 20^s, 150 bouteilles à 15^s; et trouver la valeur d'une bouteille du mélange* (1).

Puisque chaque bouteille de la première espèce vaut 25^s, les 300 bouteilles vaudront 300 fois 25^s, ou . . . . 7500^s

De même, les 200 bouteilles à 20^s chacune vaudront 200 fois 20^s, ou . . . . 4000^s

Enfin, les 150 bouteilles à 15^s chacune vaudront 150 fois 15^s, ou . . . . 2250^s

Somme 13750^s

Ajoutant ensemble tous ces produits, la somme 13750^s est le prix de toutes les bouteilles. Donc, en divisant cette somme par 650, nombre total des bouteilles, le quotient $21^s \frac{2}{13}$ sera évidemment le prix de la bouteille du mélange.

206. Exemple II. *On a employé 85 ouvriers à raison de 25^s par jour, 154 à raison de 20^s, 162 à raison de 18^s, 180 à raison de 15^s; on demande le prix moyen de tous ces ouvriers, c'est-à-dire, combien ils gagnent par jour l'un portant l'autre.*

Il est clair que 85 ouvriers à 25^s par jour gagnent 85 fois 25^s ou . . . . 2125^s

Que 154 ouvriers à 20^s gagnent 154 fois 20^s, ou 3080^s

Que 162 ouvriers à 18^s gagnent 162 fois 18^s, ou 2916^s

Que 180 ouvriers à 15^s gagnent 180 fois 15^s, ou 2700^s

Somme des gains 10821^s

Divisant la somme des gains par la somme ou le nombre

(1) J'emploie ici, et en d'autres endroits, les anciennes mesures, afin de rendre cet ouvrage d'une utilité générale; mais on les convertira en nouvelles mesures, au moyen du chap. VIII.

total des ouvriers, qui est 581, on trouvera pour quotient $18^s \frac{361}{581}$, qui est le prix moyen cherché.

207. Problème II. *Deux quantités de différentes valeurs étant données, déterminer ce qu'il faut prendre de chacune pour former une quantité moyenne dont la valeur est donnée.*

Pour cela, faites deux fractions qui aient pour dénominateur commun l'excès de la plus haute valeur sur la plus petite, et dont la première ait pour numérateur l'excès de la plus haute valeur sur la moyenne, et l'autre pour numérateur l'excès de la valeur moyenne sur la plus petite. La première fraction sera la partie qu'il faut prendre de la plus petite quantité; et la seconde, la partie qu'il faut prendre de la plus grande quantité.

208. Exemple. *Deux matières différentes, par exemple de l'or et de l'argent, pesant, sous des volumes égaux, l'une* 19℔, *l'autre* 10℔; *déterminer quelles parties de chacune de ces matières il faut prendre pour composer un mélange qui leur soit égal en volume, et qui pèse* 15℔.

Suivant la règle que nous venons de prescrire, je forme les deux fractions $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, qui ont pour dénominateur commun l'excès de 19 sur 10, et dont la première a pour numérateur l'excès de 19 sur 15, la seconde pour numérateur l'excès de 15 sur 10; et je dis que pour former le mélange il faut prendre les $\frac{4}{9}$ de la quantité d'argent et les $\frac{5}{9}$ de la quantité d'or.

En effet, représentons les poids de l'or, de l'argent et du mélange par les nombres respectifs 19, 10, 15; et de plus imaginons que les trois volumes égaux de ces trois poids différents sont partagés chacun en un même nombre de parties égales. Cela posé, l'excès du poids 19 sur le poids 15 étant 4, tandis que l'excès du poids 15 sur le poids 10 est 5, il est clair que si on mettoit dans le mélange pareil nombre de parties du volume d'or et du volume d'argent, les premières y produiroient une augmentation de poids exprimée par 4, tandis que les secondes y produiroient une diminution de poids exprimée par 5. Or, pour que l'augmentation et la diminution se compensent mu-

tuellement, on doit prendre sur les volumes composants plus ou moins de parties, selon que ces parties sont moins ou plus pesantes. Donc, si vous prenez en tout 9 parties sur les deux volumes composants, vous en devez prendre 4 sur celui d'argent et 5 sur celui d'or. Donc, en représentant chacun de nos trois volumes égaux par 1 ou par la fraction $\frac{9}{9}$, le volume $\frac{9}{9}$ du mélange sera composé des $\frac{4}{9}$ du volume d'argent et des $\frac{5}{9}$ du volume d'or.

La démonstration de cet exemple s'appliquera facilement à tous ceux de même nature.

209. *Remarque.* Si dans ces sortes de questions le mélange devoit être composé de plus de deux espèces de choses, il y auroit plusieurs manières de prendre ces choses pour former le mélange. Ainsi, qu'on propose de faire un poids de 15℔, en mêlant ensemble de l'or, de l'argent et du cuivre, que je suppose peser, sous des volumes égaux, 19℔, 10℔, 8℔ : il est clair qu'on pourra, par exemple, former successivement avec l'argent et le cuivre plusieurs corps mixtes, chacun de même volume que chacune des trois matières proposées, et combiner ensuite chacun de ces mixtes avec l'or pour former un mélange de trois métaux qui pèse 15℔. On pourroit aussi former d'abord de plusieurs manières un mixte d'or et d'argent, pourvu que ce mixte pesât plus de 15℔; puis le combiner avec le cuivre, etc.

CHAPITRE XI.

Des Règles de Proportions.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

210. On appelle *rapport* ou *raison* la comparaison de deux grandeurs, qui sont nécessairement toujours de la même espèce pour pouvoir être comparées entre elles.

Si, en comparant deux grandeurs, on considère de combien l'une surpasse l'autre, ou est surpassée par l'autre, cette *différence* s'appelle *rapport arithmétique*, *raison arithmétique*. Par exemple, le rapport arithmétique de 12 pieds à 7 pieds est 5 pieds, excès de 12 pieds sur 7 pieds; celui des nombres abstraits 12 et 7 est le nombre abstrait 5. On voit que le rapport arithmétique de deux grandeurs est toujours de même espèce qu'elles.

Mais si, en comparant deux grandeurs, on considère combien de fois l'une contient l'autre, ou est contenue dans l'autre, *ce nombre de fois* s'appelle *rapport géométrique*. Par exemple, le rapport géométrique de 12 pieds à 4 pieds est 3, quotient de $12^{pi.}$ divisés par 4^{pi}. Il est clair que le rapport géométrique peut être considéré comme une fraction qui a pour numérateur l'un des deux nombres comparés, et pour dénominateur l'autre. Ce rapport est toujours un nombre abstrait.

Les deux grandeurs qui forment un rapport, soit arithmétique, soit géométrique, s'appellent les *termes* de ce rapport. Celui qu'on prononce ou qu'on écrit le premier s'appelle *antécédent*, et l'autre s'appelle *conséquent*. Ainsi, si l'on compare, arithmétiquement ou géométriquement, 18 à 6, le terme 18 est l'antécédent, et le terme 6 est le conséquent.

211. Le résultat de la comparaison de deux rapports égaux forme une *proportion* qui est *arithmétique* ou *géométrique*, selon que les deux rapports sont arithmétiques ou géométriques. Par exemple, le rapport arithmétique de 12 à 7 étant égal à celui de 9 à 4, les quatre nombres 12, 7, 9, 4 forment une proportion arithmétique qui s'écrit ainsi, 12. 7 : 9. 4. Le rapport géométrique de 12 à 4 étant égal à celui de 15 à 5, les quatre nombres 12, 4, 15, 5 forment une proportion géométrique qu'on écrit ainsi, 12:4 :: 15:5.

Dans l'une et l'autre sorte de proportions, le premier et le troisième termes s'appellent les *antécédents*, le second et le quatrième, les *conséquents*; le premier et le quatrième termes s'appellent les *extrêmes*; le second et le troisième, les *moyens*.

Nous n'avons besoin dans ce qui suit que de quelques propriétés de la proportion géométrique; nous nous bornons donc ici à exposer ces propriétés. On trouvera dans le traité d'algèbre la théorie générale des proportions arithmétiques et géométriques.

212. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soit, par exemple, la proportion 2:6 :: 12:36. Je dis que le produit de 2 par 36 est égal au produit de 6 par 12; ce qui s'exprime ainsi, $2\times36=6\times12$.

En effet, puisque les quatre termes proposés forment une proportion, les deux fractions $\frac{2}{6}$, $\frac{12}{36}$, sont égales. Réduisons ces deux fractions au même dénominateur, nous aurons encore (100) les deux fractions égales $\frac{2\times36}{216}$, $\frac{6\times12}{216}$.

Or, ces deux fractions ayant le même dénominateur, il est clair qu'elles ne pourroient pas être égales, si leurs numérateurs n'étoient pas égaux. Ainsi on a, $2\times36=6\times12$. Chacun de ces deux produits est 72.

On voit que la démonstration précédente n'est pas particulière à l'exemple que nous avons choisi, et qu'elle s'appliquera également à toutes sortes de proportions géométriques.

213. *Donc, si le premier terme d'une proportion est l'unité, le quatrième terme sera égal au produit des moyens.* Ainsi, dans la proportion 1:4::8:32, le terme 32 est égal au produit de 4 par 8, parce que le produit de 32 par 1 est 32.

214. *Si dans une proportion les moyens sont égaux,* comme par exemple dans la proportion 2:4::4:8, *le produit des moyens est le quarré de l'un des moyens, et ce quarré est égal au produit des extrêmes.*

On appelle ces sortes de proportions, *proportions continues*; au lieu d'écrire à l'ordinaire 2:4::4:8, on écrit, pour abréger, ∺ 2:4:8.

215. Il suit de ces principes que si dans une proportion géométrique on connoît trois termes quelconques, on pourra trouver celui qui manque. Car si l'on a les deux moyens et un extrême, on aura l'extrême inconnu en divisant le produit des moyens par l'extrême connu. Si l'on connoît les deux extrêmes et un moyen, on aura le moyen inconnu en divisant le produit des extrêmes par le moyen connu.

Par exemple, qu'on ait les trois termes 2, 6, 9, appartenants à une proportion géométrique, et que 2 soit l'un des extrêmes, on multipliera les moyens 6 et 9 l'un par l'autre, ce qui donne 54; et on divisera ce produit par 2 : le quotient 27 sera l'extrême cherché; en sorte que la proportion complète est 2:6::9:27, ou 27:9::6:2.

Si les trois termes 2, 6, 9, étant donnés, celui qu'on demande doit être un moyen, 2 et 9 étant les extrêmes; on multipliera 2 par 9, et on divisera le produit 18 par 6 : le quotient 3 sera le moyen cherché. La proportion complète est donc, 2:3::6:9, ou 2:6::3:9, selon que le terme demandé est le second ou le troisième terme de la proportion.

USAGES DES PROPORTIONS GÉOMÉTRIQUES.

Règle de trois.

216. La règle de trois est une opération, ou du moins se réduit à une opération par laquelle, étant donnés trois termes quelconques d'une proportion, on trouve celui qui manque.

Il y a deux espèces de règles de trois ; la règle de trois *directe*, et la règle de trois *inverse* ; et l'une ou l'autre peut être *simple* ou *composée*.

Règle de trois directe et simple.

217. La règle de trois est *simple* et *directe*, lorsque l'énoncé de la question qui donne lieu à une telle opération ne contient que trois quantités connues, et que ces trois quantités étant supposées former avec celle qui manque une proportion géométrique, les deux termes de même espèce, qui composent l'un des rapports, sont comparés entre eux, suivant le même ordre que les deux autres termes, aussi de même espèce, qui doivent composer le second rapport.

218. Exemple I. *Si* 27 *aunes d'un certain drap ont coûté* 500^{tt}, *combien coûteront* 48 *aunes du même drap?*

Il est évident que le prix des aunes de drap doit être d'autant plus grand qu'elles sont en plus grand nombre; et que, par conséquent, le rapport des 27 aunes aux 48 aunes est le même que le rapport du prix 500^{tt} des premières au prix inconnu des dernières. Les aunes sont donc comparées entre elles suivant le même ordre que les prix qui leur correspondent. Ainsi, cet exemple appartient à une règle de trois directe-simple; et pour avoir le prix inconnu des 48 aunes, il faut chercher le quatrième terme x de la proportion suivante, $27^{aun.}:48^{aun.}::500^{tt}:x$.

Dans cette proportion, les deux premiers termes peuvent être regardés comme des nombres abstraits : car il est clair que le rapport de 27 aunes à 48 aunes est le même que celui du nombre abstrait 27 au nombre abstrait 48, puisque, dans les deux cas, on a également pour quotient la faction abstraite $\frac{27}{48}$. Notre proportion devient donc, $27:48:500^{tt}:x$; et le quatrième terme x est un nombre de livres qu'on trouvera (215) en multipliant 500^{tt} par 48, et divisant le produit par 27. Ce terme est $888^{tt}\ 17^{s}\ 9^{d}\ \frac{1}{3}$.

219. Exemple II. *Prendre les quatre deniers pour livre d'une somme proposée, par exemple, de* 5000^{tt}.

Puisqu'on doit retenir 4 deniers sur chaque livre, qui vaut 240 deniers, il est évident que le rapport de 240 deniers à 4 deniers est égal au rapport de $5000^{\#}$ au nombre de livres qu'on doit prendre sur cette somme. Ainsi on a cette proportion, $240^{d} : 4^{d} :: 5000^{\#} : x$, dans laquelle les quantités de même espèce, qui forment le premier rapport, sont comparées entr'elles, dans le même ordre que les deux quantités qui forment le second rapport.

En regardant, ce qui est permis, les deux premiers termes comme des nombres abstraits, cette proportion devient, $240 : 4 :: 5000^{\#} : x$. Le quatrième terme x, qui est un nombre de livres, se trouve en multipliant $5000^{\#}$ par 4, et divisant par 240, c'est-à-dire, en multipliant $5000^{\#}$ par la fraction $\frac{4}{240}$ qui se réduit à $\frac{1}{60}$. Or, multiplier $5000^{\#}$ par $\frac{1}{60}$, c'est (110) diviser $5000^{\#}$ par 60. On trouve pour quotient $83^{\#}\ 6^{s}\ 8^{d}$; et c'est ce qu'on doit retenir sur les $5000^{\#}$, à raison de 4 deniers pour livre.

220. Exemple III. *Si $37^{T}\ 5^{P}\ 8^{po}$ d'un certain ouvrage ont coûté $100^{\#}\ 8^{s}$, on demande combien on fera de toises du même ouvrage pour $658^{\#}\ 10^{s}$.*

Il est clair que le rapport du prix des premières toises au prix de celles qu'on cherche est le même que le rapport du nombre des premières toises au nombre des secondes; et que par conséquent les deux prix sont comparés entre eux, suivant le même ordre que les deux nombres de toises. On a donc cette proportion, $100^{\#}\ 8^{s} : 658^{\#}\ 10^{s} :: 37^{T}\ 5^{P}\ 8^{po} : x$;

Ou bien (en reduisant les deux premiers termes en sous),

$2008^{s} : 13170^{s} :: 37^{T}\ 5^{P}\ 8^{po} : x$;

Ou bien encore (en regardant les deux premiers termes comme des nombres abstraits),

$2008 : 13170 :: 37^{T}\ 5^{P}\ 8^{po} : x$.

Le quatrième terme x qu'on cherche est un nombre de toises, et on trouve qu'il est $248^{T}\ 5^{P}\ 2^{po}$ [illegible]

Regle de trois directe composée.

221. Lorsque dans l'énoncé de la question qui donne lieu à une règle de trois directe il entre plus de trois termes

connus, l'opération qu'il faut faire pour résoudre cette question s'appelle règle de trois directe *composée*. Elle se réduit à une règle de trois directe simple, en y distinguant deux causes et deux effets, multipliant ensemble les facteurs d'une même cause, et multipliant aussi ensemble les facteurs d'un même effet, comme je vais l'expliquer par des exemples.

222. Exemple I. *Si 30 ouvriers travaillant pendant 5 jours, à raison de 8 heures par jour, ont fait 45 toises d'ouvrage; combien 25 ouvriers, travaillant pendant 20 jours, à raison de 10 heures par jour, feront-ils de toises d'ouvrage?*

On voit que cet énoncé renferme sept quantités connues. Mais on observera que 30 ouvriers, 5 jours et 8 heures, sont la cause du premier effet qui est 45 toises d'ouvrage; et que 25 ouvriers, 20 jours, 10 heures, sont la cause du second effet, qui est le nombre inconnu de toises d'ouvrage. Je raisonne donc ainsi : 30 ouvriers travaillant pendant 5 jours, font le même ouvrage que 5 fois 30 ouvriers en un jour; et de plus cette dernière troupe d'ouvriers travaillant 8 heures par jour, fait le même ouvrage que 8 fois la même troupe travaillant pendant 1 heure. En conséquence, je multiplie 30 ouvriers par 5; ce qui donne 150 ouvriers, que je multiplie encore par 8; et j'ai 1200 ouvriers, qui font, pendant 1 heure, le même ouvrage que la première troupe d'ouvriers, proposée par l'état de la question.

Pareillement, 25 ouvriers travaillant pendant 20 jours font le même ouvrage que 20 fois 25 ouvriers, ou 500 ouvriers, en 1 jour; et ces 500 ouvriers, travaillant 10 heures par jour, font le même ouvrage que 10 fois 500 ouvriers, ou 5000 ouvriers en 1 heure. Ces 5000 ouvriers peuvent donc être substitués à la seconde troupe proposée par l'état de la question. Ainsi cette question revient à la suivante : *Si 1200 ouvriers font, en 1 heure, 45 toises d'ouvrage; combien 5000 ouvriers feront-ils de toises pendant le même temps?* laquelle se rapporte à la règle de trois directe et simple. Le temps du travail, pour les deux nouvelles troupes d'ouvriers, étant le même, on ne s'en mettra pas plus en peine;

et le nombre de toises qu'on cherche sera le quatrième terme de cette proportion, $1200^{ouv.} : 5000^{ouv.} :: 45^{T} : x$; ou bien (en regardant les deux premiers termes comme des nombres abstraits), $1200 : 5000 :: 45^{T} : x$. On trouve que x est $187^{T}\frac{1}{2}$.

223. Exemple II. *Si* 20 *travailleurs de terre enlèvent, en* 15 *jours,* 45 *toises cubes* (1) *de terre; combien* 25 *travailleurs, en* 40 *jours, enleveront-ils de toises cubes de terre, en supposant que les premiers ouvriers travaillent* 8 *heures par jour, les seconds* 10 *heures par jour, que la force de la première troupe d'ouvriers est à la force de la seconde, comme* 6 *est à* 7, *et que la dureté du premier terrain est à la dureté du second, comme* 9 *est à* 11?

Il y a, comme on voit, dans cet énoncé, bien plus de trois quantités connues. Mais on les réduira à trois, en considérant que 20 ouvriers, 15 jours, 8 heures, et la force 6, sont la première cause; que 45 toises de terre enlevées et la dureté 9, sont le premier effet; que 25 ouvriers, 40 jours, 10 heures, et la force 7, sont la seconde cause; que le nombre inconnu de toises de terre enlevées, et la dureté 11, sont le second effet.

Or, 1.° il est clair que 20 ouvriers, travaillant pendant 15 jours, font le même ouvrage que 15 fois 20 ouvriers, ou 300 ouvriers, pendant 1 jour; et ces 300 ouvriers étant supposés travailler 8 heures par jour, font le même ouvrage que 8 fois 300 ouvriers, ou 2400 ouvriers, en 1 heure. De plus, ces ouvriers ayant une force exprimée par 6, font le même ouvrage que 6 fois 2400 ouvriers, ou 14400 ouvriers, qui auroient une force exprimée par 1. Ainsi je vois que, par rapport à la première troupe d'ouvriers proposée par l'état de la question, le travail est le même que celui de 14400 ouvriers qui travailleroient pendant 1 heure, avec 1 degré de force.

2.° En raisonnant de même par rapport à la seconde

(1) On appelle *toise cube* un solide en forme de dé à jouer, qui a 1 toise sur chacune de trois dimensions, longueur, largeur et profondeur.

troupe d'ouvriers, on verra que leur travail est le même que celui d'un nombre d'ouvriers exprimé par le produit résultant de la multiplication successive des nombres 40, 25, 10, 7; c'est-à-dire, de 70000 ouvriers, qui travailleroient pendant 1 heure avec 1 degré de force.

3.° Les 45 toises cubes de terre enlevées dans le premier terrain, dont la dureté est exprimée par 9, occasionnent le même travail que 9 fois 45 toises, ou 405 toises, enlevées dans un terrain dont la dureté seroit 1.

4.° Le nombre inconnu x de toises enlevées dans un terrain dont la dureté est exprimée par 11, occasionne le même travail que 11 fois ce nombre x, ou 11 x toises cubes enlevées dans un terrain dont la dureté est 1.

Par toutes ces réductions, nous n'avons plus à considérer que deux troupes d'ouvriers qui ont la même force, et qui travaillent pendant le même temps dans des terrains également durs. D'où il suit que les ouvrages de ces ouvriers seront proportionnels à leurs nombres. On aura donc la proportion suivante, dont les différents termes résultent de la multiplication successive des facteurs écrits au dessus d'eux :

$20^{ouv.}$	$25^{ouv.}$	47^{T}	x^{t}
15	40	9	11
8	10		
6	7		
$14400^{ouv.}$:	$70000^{ouv.}$ ::	405^{T} :	$11x$;

proportion qui devient (en regardant les deux premiers termes comme des nombres abstraits), 14400 : 70000 :: $405^{T} : 11x$. Le quatrième terme $11x$ est égal à $405^{T} \times \frac{70000}{14400}$; il est par conséquent $\frac{70875^{T}}{36}$; c'est le nombre de toises enlevées dans le terrain dont la dureté est 1. Donc, pour avoir le nombre cherché de toises enlevées dans le terrain dont la dureté est 11, il faut diviser le nombre $\frac{70875^{T}}{36}$ par 11; ce qui donne pour quotient $\frac{70875^{T}}{396}$, ou $178^{T}\frac{43}{44}$.

Règle de trois inverse simple.

224. Une règle de trois est *inverse et simple*, lorsque l'énoncé de la question qui y donne lieu ne contient que trois quantités connues, et que ces trois quantités forment, avec celle qu'on cherche, une proportion dont les termes doivent être comparés ensemble dans un ordre inverse de celui suivant lequel ils se correspondent.

225. Exemple. *Si* 30 *ouvriers ont employé* 18 *jours à faire un certain ouvrage; combien* 25 *ouvriers emploieront-ils de jours à faire le même ouvrage?*

On sous-entend que les deux troupes d'ouvriers ont la même force et qu'elles travaillent le même nombre d'heures par jour.

Puisque l'ouvrage exécuté est le même dans les deux cas, il est clair qu'il faudra pour cela d'autant moins de jours qu'on emploiera plus d'ouvriers. Le rapport des deux nombres d'ouvriers doit donc être pris dans un ordre inverse de celui des jours qu'ils emploient à travailler, c'est-à-dire, que les 30 ouvriers sont aux 25 ouvriers, comme le nombre de jours employés par ces derniers est au nombre de jours employés par les premiers. Ainsi il faut faire la proportion, $30:25::x:18$. Multipliant ensemble les extrêmes, et divisant le produit 540 par le second terme 25, on trouvera que le nombre inconnu x de jours est $21\frac{3}{5}$.

Règle de trois inverse composée.

226. Lorsqu'il y a plus de trois quantités de connues dans l'énoncé d'une question qui demande, pour être résolue, une proportion dont les rapports doivent être pris dans un ordre inverse; l'opération qui résout la question est une règle de trois *inverse et composée.*

227. Exemple. *Si* 20 *ouvriers travaillant pendant* 15 *jours, et* 8 *heures par jour, font un certain ouvrage; combien faudra-t-il d'ouvriers, travaillant pendant* 30 *jours,* [illegible] *ures par jour, pour faire le même ouvrage?*

Un travail de 15 jours et de 8 heures par jour est la même chose qu'un travail de 8 fois 15 jours, ou de 120 jours et de 1 heure par jour. De même un travail de 30 jours, et de 10 heures par jour, est la même chose qu'un travail de 10 fois 30 jours, ou de 300 jours, et de 1 heure par jour. La question proposée revient donc à celle-ci: *Si 20 ouvriers travaillant pendant 120 jours, font un certain ouvrage, combien faudra-t-il d'ouvriers travaillant pendant 300 jours pour faire le même ouvrage, les deux troupes d'ouvriers travaillant par jour le même intervalle de temps, qui est 1 heure?* Ainsi elle se résout par une règle de trois inverse simple, car le nombre de jours décroît à mesure que le nombre des ouvriers croît. On fera donc la proportion, $20^{ouv.} : x :: 300^{j} : 120^{j}$, ou bien, $20^{ouv.} : x :: 300 : 120$; et on trouvera que le nombre inconnu x d'ouvriers est 8.

Règle de compagnie.

228. La règle de compagnie est une opération par laquelle on partage un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés. Elle est d'usage dans le commerce, pour répartir les gains faits en société, à raison de chaque mise particulière.

229. Exemple. *Trois négociants ont mis dans le commerce, le premier,* 2000ᵗᵗ; *le second,* 5844ᵗᵗ; *le troisième,* 7548ᵗᵗ; *le gain résultant de ces trois mises est* 4000ᵗᵗ *: combien revient-il à chaque négociant, proportionnellement à sa mise?*

Les trois gains devant être proportionnels aux trois mises, on a cette suite de rapports égaux,

Première mise : premier gain : seconde mise : second gain :: troisième mise : troisième gain.

De plus, il est évident que la somme des mises sera à la somme des gains, comme chaque mise particulière est au gain correspondant. J'ajoute donc ensemble les trois mises, et je forme ces trois proportions:

1.° 15392ᵗᵗ somme des trois mises : 4000ᵗᵗ gain total :: 2000ᵗᵗ mise du premier négociant : au gain de ce négociant, qu'on trouve de 519ᵗᵗ $15^{s}\frac{5}{481}$.

2.° 15392₶ : 4000₶ :: 5844₶ mise du second négociant : au gain de ce négociant, qu'on trouve de 1518₶ $14^s\frac{106}{481}$.

3.° 15392₶ : 4000₶ :: 7548₶ mise du troisième négociant : au gain de ce négociant, qu'on trouve de 1961₶ $10^s\frac{370}{481}$.

Quand on a eu trouvé les gains des deux premiers négocians, on auroit pu trouver tout de suite celui du troisième, en retranchant la somme des deux premiers gains, du gain total. Le seul avantage qu'il y ait à faire la troisième proportion, est qu'elle peut servir à vérifier les deux autres ; car, si l'on a bien opéré, le quatrième terme de cette proportion doit être égal au reste qu'on trouve en retranchant du gain total la somme des deux premiers gains.

230. On voit que pour résoudre la question précédente nous n'avons été obligés que d'employer des règles de trois simples. Voici un exemple qui demande des règles de trois composées.

231. Exemple. *Trois personnes ont mis en société, la première,* 2000₶, *qui ont resté* 6 *mois dans le commerce ; la seconde,* 3454₶, *qui y ont resté* 8 *mois ; la troisième,* 5482₶, *qui y ont resté un an ou* 12 *mois ; le gain résultant de ces trois mises est* 4000₶ *: combien revient-il à chaque personne à raison de sa mise et du temps que chaque mise a resté dans le commerce ?*

Il est évident, 1.° que les 2000₶ qui ont resté 6 mois dans le commerce, doivent produire le même gain que 6 fois 2000₶, ou 12000₶ qui y auroient resté pendant 1 mois.

2.° Que les 3454₶ qui ont resté 8 mois dans le commerce, doivent produire le même gain que 8 fois 3454₶, ou 27632₶, qui y auroient resté pendant 1 mois.

3.° Enfin, que les 5482₶, qui ont resté 12 mois dans le commerce, doivent produire le même gain que 12 fois 5482₶, ou 65784₶ qui y auroient resté pendant 1 mois.

Ainsi la question proposée est la même que si la première mise étoit 12000₶ ; la seconde, 27632₶ ; la troisième, 65784₶ ; et que ces trois mises fussent restées le même temps dans le commerce : ce qui revient au premier cas, et ne

demande plus que des règles de trois simples. J'ajoute ensemble les trois nombres 12000^{tt}, 27632^{tt}, 65784^{tt}; la somme est 105416^{tt}. Ensuite je fais les trois proportions :

1.° 105416:4000 :: 1200 : au gain du premier négociant, qu'on trouve être 455^{tt} 6^{s} 9^{d} $\frac{4263}{13177}$;

2.° 105416:4000 :: 27632^{tt} : au gain du second négociant, qu'on trouve être 1048^{tt} 9^{s} 10^{d} $\frac{6074}{13177}$;

3.° 105416 : 4000 :: 65784^{tt} : au gain du troisième négociant, qu'on trouve être 2496^{tt} 3^{s} 4^{d} $\frac{2840}{13177}$.

Règle d'intérêt ou d'escompte.

232. La règle d'intérêt ou d'escompte est une opération par laquelle, connoissant l'intérêt qu'une certaine somme rapporte pendant un temps donné, on détermine l'intérêt qu'une autre somme quelconque doit rapporter proportionnellement pendant un temps aussi donné.

233. Exemple I. *On demande combien 5784^{tt} doivent rapporter d'intérêt en 27 mois, à raison de 5 pour 100, c'est-à-dire, en supposant que 100^{tt} rapportent 5^{tt} en un an.*

Il est évident que 100^{tt} en un an ou en 12 mois rapportent le même intérêt que 12 fois 100^{tt}, ou 1200^{tt} en 1 mois; et que 5784^{tt} en 27 mois rapportent le même intérêt que 27 fois 5784^{tt}, ou 156168^{tt} en un mois. L'intérêt qu'on demande est donc le quatrième terme de la proposition suivante, 1200:5 :: 156168^{tt} :x. On trouve que ce quatrième terme x est 650^{tt} 14^{s}.

234. Exemple II. *Un homme prête à un autre une somme qui se monte à 5848^{tt}, en y comprenant l'intérêt pour un an, à raison de 5 pour 100; au bout de huit mois le prêteur demande à être remboursé : déterminer la somme que l'emprunteur doit rendre, en déduisant l'intérêt pour les 4 mois que l'argent auroit dû rester encore entre ses mains.*

Puisque 100^{tt} rapportent 5^{tt} d'intérêt en 1 an, il est clair que la somme 105^{tt} comprend le capital et l'intérêt relatifs à 100^{tt}. Donc, si l'on fait cette proportion, 105: 5 :: 5848:x, le quatrième terme x sera la partie pour la-

quième de 1, de quel nombre 60 contient-il la moitié, le quart et le cinquième.

Ainsi la proportion qui résout cette question est $\frac{19}{20}$: 1 :: 60 : au nombre cherché, qu'on trouve être $63\frac{3}{19}$.

Règles de deux fausses positions.

239. Les exemples précédents n'ont demandé qu'une seule fausse position ; le suivant et ceux de même nature en demandent deux.

240. Exemple. *Partager* $300^{\#}$ *entre trois personnes, de manière que la seconde ait deux fois autant que la première, et* $6^{\#}$ *de plus, et que la troisième ait autant que les deux autres, et* $10^{\#}$ *de plus.*

En supposant que la part de la première personne soit $1^{\#}$; celle de la seconde sera $2^{\#}+6^{\#}$, ou $8^{\#}$; celle de la troisième sera $1^{\#}+8^{\#}+10^{\#}$, ou $19^{\#}$; et la totalité de ces trois parts sera $28^{\#}$. Cette supposition est fausse, parce que la totalité des parts supposées ne fait pas $300^{\#}$. De plus, les parts supposées ne sont pas proportionnelles aux véritables parts ; car dans la seconde part il entre le nombre invariable $6^{\#}$; et dans la troisième il entre le nombre invariable $6^{\#}+10^{\#}$, ou $16^{\#}$. Or, en faisant changer la première part 1, les deux nombres invariables dont nous venons de parler empêcheront que la seconde et la troisième parts ne changent proportionnellement à la première. Si nous voulons donc avoir des proportions pareilles à celles du premier cas, négligeons dans la seconde et la troisième parts supposées les nombres invariables qui les affectent, et retranchons la somme $6^{\#}+16^{\#}$, ou $22^{\#}$ de ces mêmes nombres, du nombre proposé $300^{\#}$. Il nous restera 278 à partager en trois parties, telles que la seconde soit double de la première, et que la troisième soit égale à la somme des deux autres. Ainsi on aura les trois parts véritables de ce dernier énoncé, en faisant ces trois proportions :

1.° 6 ; 1 :: $278^{\#}$: première part, qu'on trouve être $46^{\#}$ 6^{s} 8^{d}.

2.° 6 : 2 :: 278# : seconde part, qu'on trouve être 92# 13s 4d.

3.° 6:3 :: 278#: troisième part, qu'on trouve être 139#.

Maintenant, pour avoir les parts conformément à l'énoncé de la question fondamentale, il faut ajouter 6# à la seconde des parts qu'on vient de trouver, et 16# à la troisième. Par ce moyen on aura

Première part cherchée	46#	6s	8d
Seconde part cherchée	98	13	4
Troisième part cherchée	155	0	0
Somme	300#		

CHAPITRE XII.

Des changements d'ordre, et des combinaisons.

241. On appelle *changement d'ordre, permutation*, l'art de former avec un certain nombre de choses tous les résultats dont elles sont susceptibles, en les plaçant les unes à côté des autres, de toutes les façons possibles; et *combinaison*, la manière de prendre plusieurs choses deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., suivant certaines conditions.

Nous représenterons les choses à *permuter* ou à *combiner* par les lettres A, B, C, D, etc. de l'alphabet.

Des permutations.

242. Il est évident, 1.° qu'une lettre A, considérée toute seule, n'est susceptible que d'un seul changement d'ordre qui est A.

2.° Que deux lettres A et B peuvent former les deux mots AB, BA, et sont par conséquent susceptibles de deux changements d'ordre.

3.° Qu'en prenant une troisième lettre C, elle peut occuper trois places différentes dans chacun des deux mots

formés des deux lettres A et B; savoir, une au commencement, une au milieu, et une à la fin; ce qui donne les six mots CAB, ACB, ABC, CBA, BCA, BAC. Ainsi trois lettres sont susceptibles de six changements d'ordre.

4.° Qu'en prenant une quatrième lettre D, elle peut occuper quatre places différentes dans chacun des mots formés de trois lettres A, B, C; savoir, une au commencement, une à droite de la première lettre, une à la droite de la seconde, et une à la droite de la troisième. D'où il résulte que quatre lettres sont susceptibles de 6 fois 4, ou de 24 changements d'ordre.

On voit par un raisonnement semblable que 5 lettres peuvent recevoir 5 fois 24, ou 120 arrangements différents; que six lettres en peuvent recevoir 6 fois 120, ou 720; que 7 lettres en peuvent recevoir 7 fois 720, ou 5040, etc.

Il suit de ce détail qu'on aura tous les arrangements que peuvent recevoir plusieurs lettres, en écrivant la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. Puis multipliant ensemble autant de termes du commencement de cette suite, qu'on a de lettres dont on veut déterminer les changements d'ordre. Par exemple, pour déterminer tous les changements d'ordre dont quatre lettres sont susceptibles, on multipliera ensemble les quatre premiers termes de la suite précédente : ce qui donne $1 \times 2 \times 3 \times 4$, ou 24, pour le nombre de ces arrangements.

Des combinaisons.

243. *I. cas.* Supposons qu'on ait à *combiner* ensemble un certain nombre de lettres, par exemple, les cinq premières lettres A, B, C, D, E, de l'alphabet, et qu'on veuille déterminer le nombre de mots qu'elles peuvent former, étant prises une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq. La question se résoudra ainsi.

Il est clair, 1.° qu'avec les cinq lettres A, B, C, D, E, on ne peut former que cinq mots composés chacune d'une seule lettre. Ces cinq mots sont A, B, C, D, E.

2.° Que, pour former tous les mots de deux lettres, on peut écrire chacune de cinq lettres A, B, C, D, E, à la

gauche ou à la droite de chacun des cinq mots d'une lettre. Je mets la particule disjonctive *ou*, parce que si, après avoir écrit chaque lettre à gauche de chacun des cinq mots d'une lettre, on l'écrivoit ensuite à droite, on auroit une nouvelle suite qui contiendroit les mêmes mots que la précédente. Il ne faut donc considérer que l'une ou l'autre suite ; et on voit que le nombre de mots composés de deux lettres sera exprimé par 5 × 5, c'est-à-dire par 25. La suite de ces mots est AA, AB, AC, AD, AE, BA, BB, etc.

3.° Que, pour former tous les mots de trois lettres, on peut écrire chacune des cinq lettres A, B, C, D, E, à gauche de chacun des mots de deux lettres. (Nous n'employons pas les autres permutations, parce qu'elles ne feroient que redonner les mêmes mots). D'où l'on voit que le nombre de mots de trois lettres sera exprimé par 5 × 5 × 5, c'est-à-dire par 125. La suite de ces mots est AAA, AAB, AAC, AAD, etc.

4.° Que, pour former tous les mots de quatre lettres, on peut écrire chacune des cinq lettres A, B, C, D, E, à gauche de chacun des mots de trois lettres. Ainsi le nombre de mots de quatre lettres est exprimé par 5 × 5 × 5 × 5, c'est-à-dire par 625. La suite de ces mots est AAAA, AAAB, AAAC, AAAD, etc.

5.° Enfin que, pour former tous les mots de cinq lettres, on peut écrire chacune des cinq lettres A, B, C, D, E, à gauche de chacun des mots de quatre lettres. Par conséquent le nombre de mots de cinq lettres est exprimé par 5 × 5 × 5 × 5 × 5, c'est-à-dire, par 3125. La suite de ces mots est AAAAA, AAAAB, AAAAC, AAAAD, etc.

On voit qu'en employant cinq lettres le nombre de mots d'une lettre est exprimé par 5 ; celui des mots de deux lettres, par le quarré de 5 ; celui des mots de trois lettres, par le cube 5, etc. Si on employoit six lettres, le nombre des mots d'une lettre seroit exprimé par 6 ; celui des mots de deux lettres par le quarré de 6 ; celui des mots de trois lettres par le cube de 6, etc. Il en est de même pour un plus grand nombre de lettres.

244. *II. cas.* Qu'on ait toujours à faire, avec les cinq lettres A, B, C, D, E, tous les mots d'une lettre, de deux lettres, de trois lettres, de quatre lettres, de cinq lettres; mais supposons qu'on impose la condition d'exclure tous les mots où une même lettre se trouveroit combinée avec elle-même.

Il est évident, 1.° qu'on aura toujours les cinq mots A, B, C, D, E, composés chacun d'une seule lettre.

2.° Que chacune des cinq lettres A, B, C, D, E, ne pouvant plus maintenant être combinée qu'avec les quatre autres, le nombre des mots de deux lettres sera exprimé par 5×4, c'est-à-dire, par 20. La suite de ces mots est AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, etc.

3.° Qu'une même lettre ne devant être écrite qu'une seule fois, et ne pouvant par conséquent entrer que dans chacun des mots de deux lettres où elle n'est pas déja, on n'aura que trois fois autant de mots de trois lettres, qu'on en a de deux lettres. Ainsi le nombre de mots de trois lettres est exprimés par $5\times4\times3$, c'est-à-dire, par 60. La suite de ces mots est ABC, ABD, ABE, BAC, BAD, etc.

4.° Que pareillement une même lettre ne pouvant entrer que dans les mots de trois lettres où elle n'est pas déja, on n'aura que deux fois autant de mots de quatre lettres, qu'on en a de trois lettres. Par conséquent, le nombre de mots de quatre lettres est exprimé par $5\times4\times3\times2$, c'est-à-dire, par 120. La suite de ces mots est ABCD, ABCE, ABDC; ABEC, etc,

5.° Qu'enfin, et toujours par les mêmes considérations, on ne peut avoir qu'une fois autant de mots de cinq lettres qu'on en a de quatre. Ainsi le nombre de mots de cinq lettres est exprimé par $5\times4\times3\times2\times1$, c'est-à-dire, par 120. La suite de ces mots est ABCDE, ACBDE, ADBCE, etc.

On voit assez la loi qui règne dans ces suites, quel que soit le nombre des lettres, sans que je m'arrête à l'expliquer plus en détail.

245. *III. cas.* Dans les suites de mots que nous venons de [illegible] avec une lettre, deux lettres, trois lettres, quatre

lettres, cinq lettres, il y a des mots qui contiennent les mêmes lettres différemment arrangées. Par exemple, dans la suite des mots de deux lettres, les mots AB, BA, sont formés des deux mêmes lettres. Supposons qu'outre la condition suivant laquelle ces suites ont été formées dans l'article précédent, on impose encore la loi de ne conserver dans chaque suite qu'un seul mot parmi tous ceux qui sont composés des mêmes lettres.

Il est clair que, pour satisfaire à cette nouvelle condition, il faut diviser le nombre des mots d'une lettre, de deux lettres, de trois lettres, de quatre lettres, de cinq lettres, par le nombre de permutations dont une lettre, deux lettres, trois lettres, quatre lettres, cinq lettres, sont susceptibles. Ainsi dans l'hypothèse actuelle le nombre de mots d'une lettre est exprimé par $\frac{5}{1}$, c'est-à-dire, toujours par 5, comme il est évident que cela doit être; le nombre de mots de deux lettres est exprimé par $\frac{5\times4}{1\times2}$, ou par 10; le nombre de mots de trois lettres est exprimé par $\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}$, ou par 10; le nombre de mots de quatres lettres est exprimé par $\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}$, ou par 5; le nombre de mots de cinq lettres est exprimé par $\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5}$, ou par 1.

Il en est de même pour un grand nombre de lettres. Par exemple, soient 25 lettres : dans l'hypothèse présente le nombre des mots de deux lettres est $\frac{25\times24}{1\times2}$; celui des mots de trois lettres est $\frac{25\times24\times23}{1\times2\times3}$; celui des mots de quatre lettres est $\frac{25\times24\times23\times22}{1\times2\times3\times4}$; etc.

La loi de ces sortes de suites est manifeste.

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE.

SECONDE PARTIE.

ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions et notions préliminaires.

1. L'ALGÈBRE est la science du calcul des grandeurs en général, comme l'arithmétique est la science particulière du calcul des nombres.

Quelques auteurs appellent l'algèbre l'*Arithmétique universelle* : dénomination très-juste, comme on voit, puisque l'algèbre fait sur la grandeur considérée généralement des opérations analogues à celles que l'arithmétique fait sur les nombres.

2. Tout chiffre ou caractère arithmétique a une valeur déterminée et individuelle ; ainsi, par exemple, le chiffre 4 représente toujours un seul et même nombre, c'est-à-dire, la collection de quatre unités : au contraire, les caractères algébriques doivent être généraux, indépendants de toute signification particulière, et propres à représenter toutes sortes de nombres, suivant la nature des questions auxquelles on les applique. De plus, ils doivent être simples et faciles à tracer, pour ne pas fatiguer l'attention et la mémoire. Tous ces avantages se rencontrent dans les lettres a, b, c, etc. de l'alphabet. Aussi l'usage est-il de les employer pour représenter les grandeurs dans l'algèbre.

Qu'on ait donc, par exemple, plusieurs grandeurs à ajouter ensemble, à multiplier les unes par les autres, etc. : nous supposerons que ces grandeurs sont représentées par les lettres a, b, c, etc.; nous ferons les opérations desirées, conformément aux règles qui seront prescrites ci-dessous; ensuite, quand nous serons parvenus à la conclusion d'un calcul, et quand nous en voudrons faire des applications à des exemples, nous substituerons pour chaque lettre sa valeur particulière et numérique, relative à l'état de la question; je veux dire que s'il s'agit d'un calcul de monnoies, il faudra mettre pour a, b, c, les nombres de livres, sous et deniers, que ces lettres représentent; s'il s'agit d'un calcul relatif aux distances, on mettra pour a, b, c, les toises, pieds, pouces, désignés par ces lettres. Ainsi de toutes les autres espèces de grandeurs.

Il est évident par là qu'on résout par un seul et même calcul algébrique tous les problêmes d'une même espèce, proposés dans toute la généralité dont ils sont susceptibles; et que les applications de ce calcul à tous les cas particuliers ne sont plus que des opérations arithmétiques, qui s'exécutent alors sur des quantités réduites à leur plus grand degré de simplicité.

3. Aux avantages qui résultent de la généralité des symboles, l'algèbre réunit encore celui d'employer certains signes qui rendent sa langue extrêmement simple et laconique. J'ai déja fait connoître la plupart de ces signes dans l'arithmétique; mais il est à propos de les remettre ici sous les yeux du lecteur, avec ceux que je n'ai pas eu occasion d'expliquer.

4. Le signe + signifie *plus*. C'est le caractère de l'addition. Ainsi l'expression $+a+b$ indique l'addition de la grandeur représentée par a, avec la grandeur représentée par b.

Une quantité qui n'a pas de signe est censée précédée du signe +. Ordinairement on supprime ce signe, lorsqu'il commence une phrase algébrique. Par exemple, au

lieu d'écrire, comme on vient de faire, $+a+b$, on écrit simplement $a+b$. Dans cette dernière expression, le signe $+$ est sous-entendu au-devant de a.

5. Le signe $-$, mis entre deux quantités écrites l'une à la suite de l'autre, signifie *moins*, et veut dire que la seconde quantité est soustraite de la première, ou que la seconde est prise dans un sens contraire à celui qu'on attribue à la première, comme je l'expliquerai ci-dessous. Ainsi l'expression $a-b$ indique que la grandeur b est soustraite de la grandeur a, ou que si l'on a pris a dans un sens, on doit prendre b dans un sens contraire. La quantité a, qui commence la phrase, est censée affectée du signe $+$.

6. Le signe $\times$ signifie *multiplié par*. Ainsi, $a\times b$ veut dire, a *multiplié par* b. Les deux grandeurs a et b sont censées chacune affectées du signe $+$. De même, $a\times b\times c$ représente le produit des trois grandeurs a, b, c, multipliées ensemble.

Souvent on supprime le signe $\times$, et on se contente d'écrire les quantités les unes à côté des autres. Ainsi, au lieu de $a\times b$, on écrit ab; au lieu de $a\times b\times c$, on écrit abc; au lieu de $a\times b\times c\times d$, on écrit $abcd$.

Quelquefois, au lieu du signe $\times$, on met un point. Ainsi, pour $a\times b$, on écrit $a.b$; pour $a\times b\times c$, on écrit $a.b.c$.

Lorsqu'une quantité composée de plusieurs parties séparées par les signes $+$ et $-$ doit être multipliée par une autre quantité simple ou composée, on enferme entre deux parenthèses toutes les parties qui doivent former une quantité; et on regarde le résultat comme une quantité simple à multiplier par une autre quantité simple. Ainsi l'expression $(a+b-d)\times g$ veut dire que la quantité $(a+b-d)$, regardée comme ne formant qu'un même tout, est multipliée par la quantité g. De même, $(a+b-d)\times(g+h-k)$ veut dire que les deux quantités $(a+b-d)$, $(g+h-k)$, regardées comme formant chacune un tout particulier, sont multipliées ensemble. Les mêmes multiplications peuvent s'indiquer autrement : pour $(a+b-d)\times g$, on peut écrire $(a+b-d).g$, ou $\overline{a+b-d}\times g$, ou

$\overline{a+b-d}.g$; pour $(a+b-d)\times(g+h-k)$ on peut écrire $(a+b-d).(g+h-k)$, ou $\overline{a+b-d}\times\overline{g+h-k}$, ou $\overline{a+b-d}.\overline{g+h-k}$. Il vaut mieux, pour prévenir toute équivoque, enfermer les quantités composées entre des parenthèses, que de mettre des barres au dessus d'elles.

7. Le signe —, placé entre deux quantités écrites l'une au dessus de l'autre, indique le quotient de la quantité supérieure divisée par l'inférieure. Ainsi, $\frac{a}{b}$ représente le quotient de la quantité a divisée par la quantité b. Les deux quantités a et b sont censées chacune affectées du signe $+$.

Quelquefois on indique la division de deux grandeurs en les séparant par deux points. Ainsi $a:b$ veut dire la même chose que $\frac{a}{b}$; $(a+b+c-d):(g-h-k)$ est la même chose que $\frac{a+b+c-d}{g-h-k}$.

8. Pour désigner qu'une quantité est égale à une autre, on se sert du caractère $=$ qui veut dire *est égal*. Ainsi, $a=b$ signifie a *est égal à* b.

9. Le signe $>$ ou $<$, mis entre deux quantités, signifie que celle qui est du côté de l'ouverture de ce signe est la plus grande, ou bien que celle qui est du côté de la pointe est la plus petite. Ainsi $a>b$ veut dire, a *plus grand que* b, ou, ce qui est la même chose, b *plus petit que* a. De même $a<b$ veut dire, a *plus petit que* b, ou, ce qui est la même chose, b *plus grand que* a.

10. Le signe $\sqrt{}$, placé au devant d'une quantité, indique une certaine racine de cette quantité. On écrit, sur la tête du radical, le chiffre 2, ou 3, ou 4, ou 5, etc., pour désigner la racine quarrée, ou la racine cube, ou la racine quatrième, ou la racine cinquième, etc. Ainsi, l'expression $\sqrt[2]{a}$, représente la racine quarrée de a; l'expression $\sqrt[2]{[a+b-d]}$ représente la racine quarrée de la

quantité $[a+b-d]$ regardée comme ne formant qu'un même tout; l'expression $\sqrt[3]{a}$ indique la racine cube ou troisième de a; l'expression $\sqrt[3]{[a+b-d]}$ représente la racine cube de la quantité $[a+b-d]$ regardée comme ne formant qu'un même tout; l'expression $\sqrt[4]{a}$ désigne la racine quatrième de a; etc.

Sur quoi il faut observer que lorsqu'il s'agit de la racine quarrée, on s'abstient ordinairement d'écrire l'indice : en sorte que tout radical qui n'a point d'indice, est censé un radical du second degré; ainsi, par exemple, au lieu d'écrire $\sqrt[2]{a}$, on écrit simplement $\sqrt{a}$.

11. On appelle *quantité simple* ou *monome*, une quantité qui ne contient qu'une seule partie, un seul *terme*, ou qui n'est précédée que d'un seul signe exprimé ou sous-entendu. Ainsi a est un monome; $-b$ est un monome. Le produit de plusieurs quantités simples, comme $a\,b\,c$, qui est le produit des trois facteurs a, b, c, est encore un monome, parce qu'on regarde ce produit comme ne formant qu'un même tout.

12. Si plusieurs monomes sont joints ensemble par les signes + et —, l'assemblage qui en résulte s'appelle une *quantité complexe*, ou un *polynome*; et les monomes composants en sont appelés les *termes*. Ainsi $a+b-d$ est une quantité complexe, un polynome, dont a, $+b$, $-d$, sont les termes.

Un polynome qui n'a que deux termes prend le nom de *binome*; celui qui en a trois s'appelle *trinome*; celui qui en a quatre, *quadrinome*; etc.

13. Toute quantité, soit simple, soit complexe, se nomme *rationnelle*, quand elle ne renferme point de signes radicaux dans son expression; et *radicale*, quand elle contient de tels signes. Ainsi, $a\,b$ est un monome rationnel; $\sqrt{c\,d}$ est un monome radical; $a+b-d$ est un polynome rationnel; $\sqrt{(ab+cd-ef)}$ est un polynome radical; $a+b-\sqrt{cd}$ est un polynome en partie rationnel, en partie radical.

14. Les lettres qui composent un monome, ou les termes d'un polynome, sont appelées *dimensions* de la quantité qu'elles forment. Ainsi, le monome $a\,b\,c$, où il entre trois lettres, est de trois dimensions; dans le polynome $ab - cd + mn$, chaque terme est de deux dimensions.

15. Comme le quarré d'une quantité est le produit de cette quantité multipliée *une fois* par elle-même; que le cube est le produit de la quantité multipliée *deux fois* par elle-même; ainsi de suite; on voit que le nombre des dimensions du quarré, ou du cube, ou de la quatrième puissance, ou, etc., est *double*, ou *triple*, ou *quadruple*, ou, etc., de celui des dimensions de la racine. Car, par exemple, le quarré de la quantité a, qui a une dimension, est $a \times a$, ou aa, qui a deux dimensions; le cube de la même quantité a est $a \times a \times a$, ou aaa, qui a trois dimensions; la quatrième puissance de a est $a \times a \times a \times a$, ou $aaaa$, qui a quatre dimensions; etc.

16. Donc réciproquement le nombre des dimensions de la racine quarrée, ou cube, ou quatrième, ou, etc., n'est que la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou, etc., de celui des dimensions du quarré, ou du cube, ou de la quatrième puissance, ou, etc. Ainsi, par exemple, la quantité $\sqrt{ab}$ n'est que d'une dimension, puisque le produit ab, dont on indique la racine quarrée, est de deux dimensions. De même les quantités $\sqrt[5]{abc}$, $\sqrt[4]{abcd}$, $\sqrt[5]{abcde}$, ne sont que d'une dimension. On voit semblablement que les quantités $\sqrt[2]{aabb}$, $\sqrt[3]{abcdef}$, $\sqrt[4]{aabccdde}$, sont de deux dimensions.

17. Les quantités que l'on compare ensemble dans un même calcul, ou qui forment le résultat de quelques opérations, sont toujours *homogènes*, c'est-à-dire, contiennent réellement ou implicitement le même nombre de dimensions à tous leurs termes : car on ne peut comparer ensemble que des quantités de même nature; et chaque lettre qui entre dans un terme d'un polynome a

nécessairement sa lettre correspondante dans un autre terme. Mais quelquefois des monomes que l'on compare ensemble, ou les termes d'un même polynome, paroissent n'être pas homogènes. Cela arrive, parce qu'on a pris formellement ou tacitement une certaine lettre pour l'*unité*, et que l'unité, multipliant ou divisant une quantité quelconque, ne change pas le nombre de ses unités. Soit, par exemple, le binome $ab+c$: le terme c paroît n'être que d'une dimension, tandis que le terme ab est de deux dimensions : mais il faut observer que c est la même chose que $c\times 1$; de sorte que si l'on prend une lettre m pour unité, au lieu de c, ou de $c\times 1$, nous pourrons écrire $c\times m$, ou cm, et au lieu du binome $ab+c$, nous pourrons écrire $ab+cm$, expression dont les deux termes sont homogènes.

18. On doit considérer deux choses dans toute quantité, sa valeur et sa manière d'exister par rapport aux autres grandeurs qui entrent avec elle dans un même calcul. La valeur d'une quantité s'exprime par la lettre ou par le caractère destiné à représenter le nombre de ses unités. Mais, quant à la manière d'exister les unes à l'égard des autres, les grandeurs peuvent affecter le calcul, ou dans le même sens, ou dans deux sens opposés; ce qui donne lieu de distinguer deux sortes de quantités, les *quantités positives*, et les *quantités négatives*. Cette distinction est très-importante; je vais tâcher de la faire bien comprendre par des exemples.

19. Supposons qu'un homme ait *mille* livres de biens ou de dettes : vous exprimerez également l'une ou l'autre quantité par le même symbole 1000#. Et en général, pour désigner un bien ou une dette, d'une manière indéterminée, vous pourrez employer une même lettre a. Cependant, comme les biens et les dettes sont des quantités qui affectent différemment l'état d'un homme, et que ces quantités peuvent se trouver mêlées ensemble dans un même calcul, on est convenu de les distinguer en appelant les unes *quantités positives*, les autres *quantités né-*

gatives, et en mettant le signe + au devant des quantités positives, et le signe — au devant des quantités négatives. Ainsi, pour dire algébriquement qu'un homme a un bien exprimé par a, on écrit $+a$; et pour dire qu'il a une dette exprimée par a, on écrit $-a$. Si un homme a un bien exprimé par a, et une dette exprimée par b, on représente son état par $+a-b$, ou par $a-b$, en sous-entendant le signe + au devant de la lettre a qui commence la phrase algébrique.

On voit semblablement que si, en partant d'un même point, le mouvement vers l'occident entre comme quantité positive dans un calcul, le mouvement vers l'orient, qui est opposé au premier mouvement, devra entrer dans le même calcul comme quantité négative. Si les élévations du soleil au dessus de l'horizon sont considérées comme des quantités positives, les abaissemens du soleil au dessous de l'horizon devront être traités comme des quantités négatives. Il en est de même de toutes les quantités qui existent différemment les unes par rapport aux autres.

20. Il peut arriver qu'une quantité qui se présente dans un calcul, ou positivement ou négativement, soit impossible, autrement *imaginaire*. Ces sortes de quantités proviennent de quelque incompatibilité entre les conditions d'une question. Nous en parlerons dans la suite plus expressément et plus clairement.

CHAPITRE II.

Addition des quantités algébriques.

21. AJOUTER ensemble plusieurs quantités, c'est les joindre, les prendre à-la-fois avec les signes qu'elles ont : ainsi, ajouter ensemble plusieurs biens, c'est former un bien plus grand ; ajouter ensemble plusieurs dettes, c'est former une dette plus grande ; ajouter un bien avec une dette, c'est former un résultat qui est l'excès du bien sur la dette, ou de la dette sur le bien, selon que le bien est plus grand que la dette, ou que la dette est plus grande que le bien.

Il est clair par là qu'en algèbre *ajouter* ne signifie pas toujours *augmenter*. Quand j'ajoute un bien avec un bien, j'augmente le bien; de même, quand j'ajoute une dette avec une dette, j'augmente la dette. Mais quand je joins un bien avec une dette, je *diminue* réellement l'une ou l'autre quantité.

22. Problème I. *Ajouter ensemble plusieurs monomes.*

Ecrivez tous ces monomes les uns à la suite des autres, avec les signes + et — qu'ils ont. Si, dans le résultat, la somme des quantités positives l'emporte sur la somme des quantités négatives, c'est une marque qu'il y a plus de biens que de dettes ; au contraire, il y auroit plus de dettes que de biens, si la somme des quantités négatives l'emportoit sur la somme des quantités positives. Par exemple, qu'il s'agisse d'ajouter ensemble les quatre monomes $+a$, $+b$, $-c$, $+d$; on écrira $+a+b-c+d$, ou bien $a+b-c+d$, en sous-entendant le signe + qui commence la phrase.

23. Problème II. *Ajouter des monomes avec des polynomes, ou des polynomes avec des polynomes.*

Il est clair qu'un tout étant égal à la somme de toutes ses parties prises ensemble, on aura la somme demandée, en joignant ensemble tous les termes des grandeurs qu'il faut ajouter, et en les affectant des signes qu'ils ont.

24. Exemple I. *Ajouter ensemble les trois polynomes*

$$a+b-c,$$
$$g-h-k,$$
$$m+n-p.$$

Somme, $a+b-c+g-h-k+m+n-p.$

25. Exemple II. *Ajouter ensemble les quatre polynomes*

$$a+b+c-d,$$
$$b-f+g+a,$$
$$c+e-b+g,$$
$$h+c+n-d,$$

Somme $a+b+c-d+b-f+g+a+c+$
$e-b+g+h+c+n-d.$

26. *Remarque.* Lorsque dans la somme il se trouve des termes *semblables*, c'est-à-dire, des termes qui contiennent la même lettre, s'ils n'ont qu'une dimension, ou les mêmes lettres écrites le même nombre de fois s'ils ont plus d'une dimension; alors, au lieu d'écrire plusieurs fois le même terme, on ne l'écrit qu'une seule fois, mais on met au-devant un chiffre qui marque combien de fois ce terme doit être répété. Cela s'appelle *faire la réduction.* Ainsi, dans l'exemple précédent, au lieu de $a+a$, j'écris $2a$; au lieu de $+b+b-b$, j'écris simplement $+b$, parce que l'un des biens, $+b$, est détruit par la dette $-b$, et que par conséquent le résultat du tout, $+b+b-b$, est simplement $+b$; au lieu de $+c+c+c$, j'écris $+3c$; au lieu de $-d-d$, j'écris $-2d$; enfin, au lieu de $+g+g$, j'écris $+2g$. Par toutes ces réductions, notre somme devient $2a+b+3c-2d-f+2g+e+h+n.$

Le chiffre qu'on place ainsi au-devant d'une quantité pour marquer combien de fois elle doit être répétée positivement ou négativement, s'appelle *coëfficient.*

Lorsqu'une quantité n'a point de coëfficient, elle est censée avoir l'unité pour coëfficient. Ainsi a est la même chose que $1a$; ab est la même chose que $1ab$.

Voici encore deux exemples d'additions de polynomes avec les réductions.

27. Exemple I. *Ajouter ensemble les polynomes*

$$3a-2b+4c-8d,$$
$$-8a+7b-5c+4d,$$
$$3a-4b+6h.$$

Somme, $-2a+b-c-4d+6h$.

28. Exemple II. *Ajouter ensemble les polynomes*

$$6aa-5bc+3k\sqrt{de},$$
$$-7aa+3bc-2k\sqrt{de},$$
$$2mn-f\sqrt[3]{mnp}+ff-gh.$$

Somme, $-aa-2bc+k\sqrt{de}+2mn-f\sqrt[3]{mnp}+ff-gh$.

CHAPITRE III.

Soustraction des quantités algébriques.

29. SOUSTRAIRE une quantité d'une autre, c'est prendre la première dans un sens contraire à celui qu'elle a. Ainsi soustraire un bien, c'est poser une dette; soustraire une dette, c'est poser un bien.

On voit donc que *soustraire* n'est pas toujours *diminuer*. Quand je soustrais un bien d'un bien, je diminue celui-ci: mais quand d'un bien je soustrais une dette, *j'augmente* réellement le bien, puisqu'un homme à qui l'on ôte une dette devient plus riche de la quantité qui exprime cette dette.

30. Problême I. *Retrancher un monome d'une autre quantité quelconque.*

Changez le signe du monome qu'il faut retrancher, et

en cet état écrivez-le à la suite, ou en tel autre endroit que vous voudrez, de la quantité dont il faut le retrancher : le résultat exprimera un bien ou une dette, selon qu'il sera positif ou négatif. Par exemple, si de la quantité $a+b$ il s'agit de retrancher le monome $+c$, on écrira pour reste $a+b-c$. Si de la quantité $a+b$ on veut retrancher le monome $-c$, on écrira pour reste $a+b+c$.

31. Problème II. *Soustraire un polynome d'un monome, ou d'un polynome.*

Changez les signes de tous les termes de la quantité à soustraire. Quand il se trouvera dans le résultat des termes semblables, vous ferez la réduction, comme nous l'avons expliqué pour l'addition.

32. Exemple I. *De* . . . . . $6a-4b+5c$,
soustraire. . . . . $4a-6b+9c$.

Reste $6a-4b+5c-4a+6b-9c$;
ou bien, en faisant la réduction, $2a+2b-4c$.

33. Exemple II. *De* . . . $-5aa+5bc+4g\sqrt{cd}$,
soustraire . . . . $+3aa-2g\sqrt{cd}-f\sqrt[3]{mnp}$.

Reste $-5aa+5bc+4g\sqrt{cd}-3aa+2g\sqrt{cd}+f\sqrt[3]{mnp}$;
ou bien, en faisant la réduction, $-8aa+5bc+6g\sqrt{cd}+f\sqrt[3]{mnp}$.

CHAPITRE IV.

Multiplication des quantités algébriques.

34. MULTIPLIER une quantité par une autre, c'est répéter la première autant de fois qu'il y a d'unités dans la seconde; et, de plus, la répéter dans le sens de la seconde; c'est-à-dire, l'ajouter ou la prendre avec les signes tels qu'ils sont, si le multiplicateur est positif; ou bien la soustraire, et par conséquent changer ses signes, si le multiplicateur est négatif. Tout cela suit clairement des idées que nous avons données de l'addition et de la soustraction.

35. Donc, 1.° Si le multiplicande et le multiplicateur sont positifs, le produit sera positif, puisqu'un bien ajouté un certain nombre de fois avec lui-même ne peut produire qu'un bien. Ainsi $+a \times +b$ donne $+ab$. Cette règle s'exprime ainsi en général, $+ \times +$ *donne* $+$.

2.° Si le multiplicande est négatif, et le multiplicateur positif, le produit sera négatif, puisqu'une dette ajoutée un certain nombre de fois avec elle-même ne peut produire qu'une dette. Ainsi $-a \times +b$ donne $-ab$. Cette règle s'exprime ainsi en général, $- \times +$ *donne* $-$.

3.° Si le multiplicande est positif, et le multiplicateur négatif, le produit sera négatif, puisqu'un bien soustrait un certain nombre de fois opère dans l'état d'un homme le même effet qu'une dette exprimée par le même nombre d'unités, et que par conséquent ces deux effets doivent être désignés par le même caractère $-$. Cette règle s'exprime ainsi en général, $+ \times -$ *donne* $-$.

4.° Si le multiplicande et le multiplicateur sont tous deux négatifs, le produit sera positif, puisqu'une dette soustraite un certain nombre de fois opère dans l'état d'un homme le même effet qu'un bien exprimé par le même nombre d'unités, et que par conséquent ces deux effets doivent

être désignés par le même caractère $+$. Cette règle s'exprime ainsi en général : $-\times-$ *donne* $+$.

Multiplication des quantités rationnelles.

36. Problême I. *Multiplier un monome rationnel par un autre monome rationnel.*

Ecrivez d'abord le signe qui doit précéder le produit, conformément à la règle établie (35) ; ensuite écrivez les unes à côté des autres les lettres dont les deux facteurs de la multiplication sont composés. Ainsi, par exemple, pour multiplier $+a$ par $+b$, on écrira $+ab$; pour multiplier $+ab$ par $-c$, on écrira $-abc$; pour multiplier $-abc$ par $+de$, on écrira $-abcde$; pour multiplier $-gh$ par $-mn$, on écrira $+ghmn$.

Lorsque deux monomes qu'on doit multiplier ensemble ont des coëfficients autres que l'unité; après avoir écrit le signe qui doit précéder le produit, il faut multiplier ensemble les coëfficients, suivant les règles de l'arithmétique, et ensuite écrire les quantités littérales les unes à côté des autres. Par exemple, qu'on ait à multiplier $+3a$ par $-5b$, on écrira $-15ab$. De même, le produit de $-4cd$ par $-8f$ est $+32cdf$; le produit de $-7ab$ par $+3fg$, est $-21\,abfg$.

37. *Remarque.* Il arrive souvent qu'une même lettre doit être multipliée une fois ou plusieurs fois par elle-même ; alors, pour éviter les répétitions de cette lettre et pour plus de clarté, on se contente de l'écrire une seule fois, et on met à sa droite un petit chiffre un peu élevé, qu'on appelle *exposant*, lequel marque combien de fois la lettre devroit être écrite comme facteur. Par exemple, qu'on ait le produit $a\times a$, au lieu d'écrire aa, on écrit a^2 ; pour le produit $a\times a\times a$, au lieu d'écrire aaa, on écrit a^3; ainsi de suite.

Lorsqu'une lettre n'a pas d'exposant, elle est censée avoir l'unité pour exposant : ainsi a est la même chose que a^1.

Les exposants sont surtout d'usage pour les cas où une même lettre doit être écrite plus de deux fois comme facteur, car on ne s'en sert pas quelquefois lorsqu'une

lettre doit être écrite deux fois seulement; ainsi pour aa, on écrira indifféremment aa ou a^2.

On doit bien prendre garde à ne pas confondre l'exposant avec le coëfficient. Celui-ci marque qu'une quantité doit être *ajoutée* avec elle-même une fois, deux fois, etc; et l'autre, qu'une quantité doit être *multipliée* par elle-même une fois, deux fois, etc. Ainsi $2a$ n'est pas la même chose que a^2. En effet, soit, par exemple, $a=3$; $2a$ ou $a+a$ sera $3+3$, c'est-à-dire 6; et a^2 sera $a \times a$, ou 3×3, c'est-à-dire 9.

38. *Corollaire.* Il résulte de la nature de l'exposant, que, si l'on veut multiplier ensemble des monomes qui contiennent la même lettre avec des exposants différents, il faudra écrire une fois seulement cette lettre, et lui donner pour exposant la somme des exposants des facteurs. Ainsi le produit de a par a^2 est a^{1+2} ou a^3; le produit de a^2 par a^3 est a^5; le produit de a^3 par a^4 est a^7; le produit de $-a^2b^2$ par a^5b^3 est $-a^7b^5$; le produit de $-4a^2b$ par $-5a^3b^2$ est $+20a^5b^3$; le produit de $-5a^2b^2c^2$ par $-3ab^5c^4$ est $+15a^3b^7c^6$.

Tout cela est clair, puisque le produit de a par a^2 est la même chose que $a \times a \times a$, ou a^3; que le produit de a^2 par a^3 est la même chose que $a \times a \times a \times a \times a$, ou a^5; ainsi des autres.

39. Problême II. *Multiplier un polynome par un monome ou par un polynome.*

Multipliez successivement tous les termes du polynome multiplicande par le monome multiplicateur ou par tous les termes du polynome multiplicateur, en ayant égard à la règle des signes, à celle des coëfficients, et à celle des exposants : la somme de tous ces produits partiels sera le produit total. On doit avoir soin de faire les réductions convenables.

40. Exemple I. *Multiplier* . . . . $a^2-5ab+7cd$

par . . . . $-5ac$.

Produit $-5a^3c+25a^2bc-35ac^2d$.

41. Exemple II. *Multiplier* . . . . $3a^2-5bd+cf$
par . . . . $-5a^2+4bd-8cf$.

1.er produit $-15a^4+25a^2bd-5a^2cf$;
2.e produit $+12a^2bd-20b^2d^2+4bcdf$;
3.e produit $-24a^2cf+40bcdf-8c^2f^2$;

Produit total $-15a^4+37a^2bd-29a^2cf-20b^2d^2+44bcdf-8c^2f^2$.

On voit que le multiplicande $3a^2-5bd+cf$ a été d'abord multiplié par $-5a^2$, puis par $+4bd$, enfin par $-8cf$; et qu'ensuite on a ajouté ensemble tous les produits partiels ; ce qui a donné, toutes réductions faites, le produit total écrit ci-dessus.

42. Exemple III. *Multiplier* $-5a^2b+ab^2-cd^2+8fgh$
par . . . . $-9ab+4f^2-15mn+9cd$.

1.er prod. $+45a^3b^2-9a^2b^3+9abcd^2-72abfgh$;
2.e prod. $-20a^2bf^2+4ab^2f^2-4cd^2f^2+32f^3gh$;
3.e prod. $+75a^2bmn-15ab^2mn+15cd^2mn-120fghmn$;
4.e prod. $-45a^2bcd+9ab^2cd-9c^2d^3+72cdfgh$.

Produit total, $45a^3b^2-9a^2b^3+9abcd^2-72abfgh-20a^2bf^2+4ab^2f^2-4cd^2f^2+32f^3gh+75a^2bmn-15ab^2mn+15cd^2mn-120fghmn-45a^2bcd+9ab^2cd-9c^2d^3+72cdfgh$.

43. *Scholie.* Il peut se faire qu'on ait à multiplier ensemble plus de deux quantités : alors il faut commencer par multiplier l'une par l'autre deux de ces quantités, puis multiplier leur produit par la troisième ; ce qui donnera un second produit, qu'on multipliera par la quatrième, ainsi de suite. On voit assez qu'il est indifférent de prendre les facteurs dans tel ordre qu'on voudra.

44. Exemple I. *Effectuer la multiplication indiquée* $-6a^2 \times -4bc \times +3mn \times -9gh$.

Je multiplie d'abord $-6a^2$ par $-4bc$; le produit est $+24a^2bc$, que je multiplie ensuite par $+3mn$; le second produit est $+72a^2bcmn$, que je multiplie par $-9gh$; le troisième produit est $-648a^2bcmngh$, et c'est le résultat de la multiplication indiquée.

45. Exemple II. *Effectuer la multiplication indiquée* $(a-b)\times(3a^2-2b^2)\times(5m^3+6n^3)$.

Je commence par multiplier $a-b$ par $3a^2-2b^2$, ce qui me donne le produit $3a^3-3a^2b-2ab^2+2b^3$; ensuite je multiplie ce produit par $5m^3+6n^3$, ce qui me donne le produit cherché $15a^3m^3-15a^2bm^3-10ab^2m^3+10b^3m^3+18a^3n^3-18a^2bn^3-12ab^2n^3+12b^3n^3$.

Multiplication des quantités radicales.

46. Lorsque parmi les facteurs d'une multiplication il se trouve des quantités radicales, la multiplication se fait comme je l'expliquerai tout-à-l'heure, après avoir enseigné la manière de présenter les quantités radicales sous une forme qui les rend susceptibles des mêmes calculs qu'on fait sur les quantités rationnelles. Voici en quoi consiste ce moyen; nous en avons déja indiqué l'esprit (15 et 16).

47. Soit la quantité a, ou, ce qui est la même chose (37), a^1; et qu'on élève cette quantité successivement au quarré, au cube, à la quatrième puissance, à la cinquième puissance; et en général à une puissance dont le numéro, suivant l'ordre de dénomination, est le nombre entier n; on formera la suite :

1.re puiss.	2.e puiss.	3.e puiss.	4.e puiss.	5.e puiss.	n.e puiss.
a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^n,

dans laquelle on voit que les exposants des puissances seconde, troisième, quatrième, etc., sont les produits de l'exposant 1 de la première puissance par les nombres 2, 3, 4, etc.

On voit pareillement que le quarré d'une quantité telle que a^p est a^{2p}, que son cube est a^{3p}, que sa quatrième puiss- est a^{4p}, ainsi de suite; car le quarré de a^p n'est autre chose que $a^p\times a^p$, c'est-à-dire (37) a^{p+p}, ou a^{2p}; le cube de a^p n'est autre chose que $a^p\times a^p\times a^p$, c'est-à-dire, a^{p+p+p}, ou a^{3p}; la quatrième puissance de a^p n'est autre chose que $a^p\times a^p\times a^p\times a^p$, c'est-à-dire, $a^{p+p+p+p}$, ou a^{4p}; ainsi des autres.

En suivant le même principe, le quarré de a^nb^p est $a^{2n}b^{2p}$; le cube de a^nb^p est $a^{3n}b^{3p}$; etc.

48. Il suit de là qu'en général l'exposant du quarré est double de l'exposant de la racine quarrée; que l'exposant du cube est triple de l'exposant de la racine cube; que l'exposant de la quatrième puissance est quadruple de l'exposant de la racine quatrième; ainsi de suite.

49. Donc réciproquement on tirera ou l'on indiquera la racine seconde, ou troisième, ou quatrième, etc. d'une quantité proposée, en prenant la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou, etc. de l'exposant de cette quantité. Si cette même quantité contient plusieurs lettres, il faut prendre la moitié, ou le tiers, ou le quart, etc. de l'exposant de chaque lettre. Ainsi $\sqrt{a^2}$ est la même chose que $a^{\frac{2}{2}}$, ou a^1, ou a; $\sqrt[3]{a}$, ou $\sqrt[3]{a^1}$, est la même chose que $a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{ab^2}$ est la même chose que $a^{\frac{1}{2}}b$; $\sqrt[4]{a^2b^3c^5}$ est la même chose que $a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{5}{4}}$, ou $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{5}{4}}$.

50. Probléme I. *Multiplier ensemble deux monomes dont l'un est rationnel et l'autre une quantité radicale.*

Après avoir écrit le signe qui doit affecter le produit, conformément à la règle de l'article 35, et après avoir multiplié ensemble les coëfficients, s'il y en a d'autres que l'unité, il faut écrire les quantités littérales rationnelles au-devant des quantités radicales. Ainsi le produit de $+\sqrt{ac}$ par $-b$ est $-b\sqrt{ac}$, ou $-ba^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$; le produit de $+4d\sqrt{ac}$ par $-6b$ est $-24bd\sqrt{ac}$, ou $-24bda^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$.

Nous observerons que si, dans le produit, une même lettre a un exposant entier et un exposant fractionnaire, comme cela arrive souvent, on peut n'écrire qu'une fois cette lettre, en l'affectant d'un exposant égal à la somme de ses exposants partiels.

51. Probléme II. *Multiplier ensemble deux monomes qui sont l'un et l'autre des quantités radicales.*

Il peut arriver que les deux radicaux soient ou ne soient pas de la même espèce.

I.er CAS.

Que les deux radicaux soient d'abord de la même espèce, c'est-à-dire, ou tous les deux du second degré, ou tous les deux du troisième degré, etc. : alors, après avoir écrit le signe qui doit précéder le produit, et après avoir multiplié les coëfficients et les quantités rationnelles, s'il y en a au-devant des radicaux, vous écrirez le signe radical commun aux deux facteurs de la multiplication, et à la suite de ce signe les produits des lettres qui sont après les signes radicaux de ces deux mêmes facteurs. Ainsi le produit de $+\sqrt{a}$ par $+\sqrt{b}$ est $+\sqrt{ab}$, ou $+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; le produit de $+\sqrt{a}$ par $-\sqrt{b}$ est $-\sqrt{ab}$, ou $-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; le produit de $+\sqrt[3]{a}$ par $-\sqrt[3]{b}$ est $-\sqrt[3]{ab}$, ou $-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; le produit de $-8a\sqrt[4]{h}$ par $-5c\sqrt[4]{g}$ est $+40ac\sqrt[4]{hg}$, ou $+40ach^{\frac{1}{4}}g^{\frac{1}{4}}$.

La raison de ces opérations est fondée sur ce principe que le produit de la racine quarrée, ou cube, ou quatrième, etc. d'une quantité, par la racine semblable d'une autre quantité, est égal à la racine pareille du produit de ces deux quantités. Or ce principe est évident ; car, puisque le quarré d'une quantité telle que ab est a^2b^2, que son cube est à a^3b^3, que sa quatrième puissance est a^4b^4, etc. ; il s'ensuit réciproquement que $\sqrt{a^2b^2}=ab=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^2}$; que $\sqrt[3]{a^3b^3}=ab=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b^3}$; ainsi des autres quantités pareilles.

II.e CAS.

Si les deux facteurs de la multiplication sont des quantité radicales de différentes espèces, on commencera par les ramener à la même espèce, en substituant aux signes radicaux les fractions exponentielles correspondantes, et en réduisant ensuite ces fractions au même dénominateur ; ce qui rappelle ce cas au précédent. Qu'on ait, par

exemple, à multiplier $+\sqrt{a}$ par $+\sqrt[3]{b^2}$, pour $+\sqrt{a}$ j'écris $+a^{\frac{1}{2}}$, et pour $+\sqrt[3]{b^2}$ j'écris $+b^{\frac{2}{3}}$; je réduis (Arithm. 105) les deux fractions exponentielles $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ au même dénominateur : elles deviennent $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$; en sorte que $+a^{\frac{1}{2}}$ est la même chose que $+a^{\frac{3}{6}}$, ou $+\sqrt[6]{a^3}$, et $+b^{\frac{2}{3}}$ est la même chose que $+b^{\frac{4}{6}}$, ou $+\sqrt[6]{b^4}$: or, par le cas précédent, le produit de $+\sqrt[6]{a^3}$ par $+\sqrt[6]{b^4}$, est $+\sqrt[6]{a^3b^4}$, ou $+a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{4}{6}}$.

Il est clair qu'au lieu de $+a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{4}{6}}$ on peut écrire simplement $+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$, en laissant les fractions exponentielles sous leur première forme. Mais nous avons enseigné le moyen de ramener ces fractions, ou les radicaux qu'elles représentent, à la même dénomination, parce qu'il est utile de savoir faire et de pratiquer cette opération dans plusieurs cas.

52. *Scholie.* Si l'on avoit à multiplier ensemble plus de deux quantités pareilles à celles dont il a été question dans les deux problèmes précédents, on multiplieroit d'abord l'une par l'autre les deux premières; puis on multiplieroit le produit résultant par la troisième ; ainsi de suite. Par exemple, pour effectuer le produit $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b}\times\sqrt[4]{c}$, je multiplie d'abord $\sqrt{a}$ par $\sqrt[3]{b}$, ce qui donne le produit $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$, ou $a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{2}{6}}$, ou $\sqrt[6]{a^3b^2}$; ensuite je multiplie ce produit par $\sqrt[4]{c}$, ou $c^{\frac{1}{4}}$, et j'ai $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}$, ou (en réduisant les trois fractions exponentielles au même dénominateur), $a^{\frac{12}{24}}b^{\frac{8}{24}}c^{\frac{6}{24}}$, ou $a^{\frac{6}{12}}b^{\frac{4}{12}}c^{\frac{3}{12}}$, ou $\sqrt[12]{a^6b^4c^3}$.

53. Problème III. *Multiplier ensemble des quantités complexes qui contiennent des radicaux.*

Multipliez successivement chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur; opération qui s'exécute par ce qui précède : ajoutez ensemble tous les produits; la somme sera le produit total demandé.

54. Exemple. *Multiplier* . . . . . . $-5a^2+7mn+\sqrt{abfh}$,
par . . . . $-7m+8\sqrt[3]{a^2b}$.

Produit, $35a^2m-49m^2n-7m\sqrt{abfh}-40a^2\sqrt[3]{a^2b}$ $+56mn\sqrt[3]{a^2b}+8\sqrt[6]{a^7b^5f^3h^3}$, ou $35a^2m-49m^2n$ $-7m\sqrt{abfh}-40a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{1}{3}}+56mna^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+8a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}f^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}$.

CHAPITRE V.

Division des quantités algébriques.

55. DIVISER une quantité par une autre, c'est en chercher une troisième, qui, en multipliant la seconde, donne un produit égal à la première. Le dividende peut donc être regardé comme le produit du diviseur par le quotient.

56. De là et de l'article 35, il suit, 1.° que si le dividende et le diviseur ont tous le signe +, le quotient aura aussi le signe +. Cette règle s'exprime ainsi en général: $\frac{+}{+}$ *donne* +.

2.° Si le dividende a le signe + et le diviseur le signe —, le quotient aura le signe —. Cette règle s'exprime ainsi en général : $\frac{+}{-}$ *donne* —.

3.° Si le dividende a le signe — et le diviseur le signe +, le quotient aura le signe —. Cette règle s'exprime ainsi en général : $\frac{-}{+}$ *donne* —.

4.° Si le dividende et le diviseur ont tous les deux le signe —, le quotient aura le signe +. Cette règle s'exprime ainsi en général : $\frac{-}{-}$ *donne* +.

Tout cela est évident, puisque le produit du diviseur par le quotient doit avoir un signe qui soit celui du dividende.

[illegible] des quantités rationnelles.

[illegible] diviser un monome rationnel par un [illegible] monome.

[illegible] la division décompose ce que la multiplication [illegible] opérations par lesquelles on trouve un quo[illegible] être contraires à celles par lesquelles on [illegible] produit. Ainsi, pour résoudre le problème [illegible], 1.° écrivez le signe qui doit précéder le [illegible] conformément à la règle que nous venons de [illegible] 2.° lorsque le dividende ou le diviseur, ou tous [illegible] ont des coëfficients autres que l'unité, divisez [illegible] les règles de l'arithmétique le coëfficient du dividende par celui du diviseur; 3.° effacez les lettres communes au dividende et au diviseur : la quantité trouvée par toutes ces opérations sera le quotient qu'on demandoit. Par exemple, le quotient de $+ab$ divisé par $+a$ est $+b$; celui de $-abh$ divisé par ab est $-h$; celui de $-mnpq$ divisé par $-nq$ est $+mp$; celui de $-15abb$ divisé par $3ab$ est $-5b$; celui de $-35mnpq$ divisé par $-7mn$ est $+5pq$.

Toutes ces opérations sont évidentes; car, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on aura pour produit le dividende, comme cela doit être.

58. *Remarque I.* Quelquefois il ne se trouve pas de lettres communes aa dividende et au diviseur, ni de facteur commun à leurs coëfficients; alors la division ne peut que s'indiquer. Par exemple, on ne peut qu'indiquer la division de a par b, et la manière de l'indiquer est $\frac{a}{b}$; de même la division de $2a$ par $3b$ s'indique par $\frac{2a}{3b}$. Ces sortes d'expressions doivent être considérées comme des fractions dont le numérateur est le dividende et le dénominateur le diviseur.

Quelquefois les lettres ou les facteurs du diviseur ne se trouvent qu'en partie dans le dividende : alors la division se fait en partie, et s'indique en partie.

Ainsi, en divisant $-abcd$ par $+abh$, le quotient est $-\frac{cd}{h}$.

59. *Remarque II.* Si dans le dividende et dans le diviseur il se trouve une même lettre avec des exposants différents, la division de ces deux quantités se fait en retranchant de l'exposant du dividende l'exposant du diviseur. Ainsi, $\frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$; $\frac{8a^5b^2}{4a^3b} = 2a^{5-3}b^{2-1} = 2a^2b$; $\frac{5a^7b^4c^2}{7a^6b^2c} = \frac{5a^{7-6}b^{4-2}c^{2-1}}{7} = \frac{5ab^2c}{7}$. En effet, $\frac{a^4}{a^2}$ n'est autre chose que $\frac{aaaa}{aa}$, qui devient (en effectuant la division) aa ou a^2. De même, $\frac{8a^5b^2}{4a^3b} = \frac{8aaaaabb}{4aaab} = 2aab = 2a^2b$; ainsi des autres.

On voit par là que $a^0 = 1$; car $1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$. Ainsi toute quantité élevée à la puissance 0 vaut 1; car une telle expression représente toujours le quotient d'une grandeur divisée par elle-même; quotient qui est nécessairement 1, puisque toute grandeur se contient une fois elle-même.

60. *Remarque III.* Si l'exposant d'une lettre dans le dividende est moindre que l'exposant de la même lettre dans le diviseur, on aura un reste négatif, en retranchant le second exposant du premier.

Ainsi, $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$; $\frac{7a^3b^2}{a^5b^3} = 7a^{3-5}b^{2-3} = 7a^{-2}b^{-1}$.

Il est évident que si on avoit commencé par supprimer les lettres communes au dividende et au diviseur, on auroit eu $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3} = \frac{a^0}{a^3} = a^{-3}$; $\frac{7a^3b^2}{a^5b^3} = \frac{7}{a^2b} = \frac{7a^0b^0}{a^2b} = 7a^{-2}b^{-1}$.

Par là on comprend la signification précise des exposants négatifs qu'on emploie fréquemment dans l'algèbre. Une lettre qui a un exposant négatif représente un diviseur égal à cette lettre affectée du même exposant pris positivement; c'est-à-dire, par exemple, que a^{-2}, ou

est la même chose que $\frac{1}{a^2}$; $4b^2a^{-5}$ est la même chose que $\frac{4b^2}{a^5}$.

61. Problème II. *Diviser un polynome quelconque par un monome.*

On divisera successivement tous les termes du dividende par le diviseur, et la somme de tous les quotients partiels formera le quotient total.

Il est à propos, pour faciliter l'opération, d'*ordonner* le polynome, c'est-à-dire, d'écrire successivement, en allant de gauche à droite, tous les termes où une lettre choisie à volonté a les plus grands exposants, et de diviser ensuite, dans le même ordre, chaque terme du polynome par le diviseur.

62. Exemple. *Diviser le polynome . . . $a^2b^2 - 2a^3d + 4a^4 - 4abcd$, par le monome $-2a^2$.*

Je commence par ordonner le polynome par rapport à la lettre a qui se trouve au dividende et au diviseur ; je dispose ces deux quantités comme pour les quantités numériques, et comme on le voit ici ; ensuite je divise tous les termes du dividende par le diviseur, et j'écris chaque quotient partiel, à mesure que je le trouve. La somme de tous les quotients partiels forme le quotient total.

Dividende.	Diviseur.
$4a^4 - 2a^3d + a^2b^2 - 4abcd$	$-2a^2$
	Quotient.
	$-2a^2 + ad - \frac{b^2}{2} + \frac{2bcd}{a}$.

63. Problème III. *Diviser un polynome par un polynome.*

On commencera par ordonner le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre, puis on divisera toutes les parties du dividende par le diviseur, en suivant à peu près les mêmes procédés que dans l'Arithmétique. Cela s'entendra mieux par des exemples.

64. Exemple I. *Diviser* . . . . $3ab^2 - 3a^2b + a^3 - b^3$,
par . . . . $-2ab + a^2 + b^2$.

J'ordonne d'abord le dividende et le diviseur par rapport à la même lettre a; ensuite je fais la division, comme on le voit ici.

Divid. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, $-a^3+2a^2b-ab^2$	Diviseur. $a^2-2ab+b^2$
1.er reste $-a^2b+2ab^2-b^3$, $+a^2b-2ab^2+b^3$,	Quotient. $a-b$
2.e reste 0	

1.° Je divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; et, comme ils sont censés être tous deux affectés du signe +, le quotient aura aussi le signe +, qu'on pourra supprimer, parce qu'il commence la phrase. Or, en divisant a^3 par a^2, on a pour quotient la lettre a que j'écris à l'endroit du quotient. Je multiplie le diviseur entier $a^2-2ab+b^2$ par le quotient partiel a, ce qui donne le produit $a^3-2a^2b+ab^2$. Ce produit doit être retranché du dividende. Ainsi je l'écris sous le dividende, avec des signes contraires à ceux qu'il a; et après avoir fait la réduction, c'est-à-dire, après avoir effacé les termes qui se trouvent avec des signes contraires, dans le dividende et dans la quantité qui vient d'être écrite au dessous de lui, j'ai le reste $-a^2b+2ab^2-b^3$ qu'il faut diviser par le diviseur $a^2-2ab+b^2$.

2.° Je fais cette seconde opération, en divisant le premier terme $-a^2b$ du dividende par le premier terme a^2 du diviseur; j'ai pour second quotient partiel $-b$, que j'écris à la suite de la première partie a du quotient total. Je multiplie le diviseur entier par $-b$; ce qui donne le produit $-a^2b+2ab^2-b^3$ que j'écris avec des signes contraires sous le dividende. Et comme, après avoir fait la réduction, il ne reste rien, je conclus que le quotient exact de la quantité $a^3-3a^2b\pm 3ab^2-b^3$ divisée par a^2-2ab $\pm b^2$, est $a-b$.

65. Exemple II. *Diviser* . . . . a^5+b^5,
par . . . . $a\ +b$.

Dividende.	a^5+b^5,	Diviseur. $a+b$
	$-a^5-a^4b$,	Quotient.
1.er reste	$-a^4b+b^5$,	$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$.
	$+a^4b+a^3b^2$,	
2.e reste	$a^3b^2+b^5$,	
	$-a^3b^2-a^2b^3$,	
3.e reste	$-a^2b^3+b^5$,	
	$+a^2b^3+ab^4$,	
4.e reste	ab^4+b^5,	
	$-ab^4-b^5$,	
5.e reste	0	

1.° Le dividende et le diviseur étant ordonnés par rapport à a, je divise le premier terme a^5 du dividende par le premier terme a du diviseur; il vient le premier quotient partiel a^4, que j'écris à sa place. Je multiplie le diviseur $a+b$ par a^4, et j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende; et il vient $-a^5-a^4b$. Faisant la réduction du dividende et de cette quantité, on a pour premier reste, ou pour second dividende partiel ordonné par rapport à a, la quantité $-a^4b+b^5$.

2.° Je divise le premier terme $-a^4b$ de ce dividende par le premier terme a du diviseur; il vient le second quotient partiel $-a^3b$, que j'écris à la suite du premier; je multiplie $a+b$ par $-a^3b$; et j'écris le produit avec des signes contraires sous le dividende; il vient $a^4b+a^3b^2$. Faisant la réduction, le second reste, ou le troisième dividende partiel, est $a^3b^2+b^5$.

3.° Je divise le premier terme a^3b^2 de ce dividende par a; il vient au quotient $+a^2b^2$ que j'écris; je multiplie le diviseur $a+b$ par a^2b^2; et j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende; il vient $-a^3b^2-a^2b^3$. La réduction étant faite, on a $-a^2b^3+b^5$ pour troisième reste, ou pour quatrième dividende partiel.

4.° Je divise $-a^2b^3$ par a ; il vient $-ab^3$ pour quatrième quotient partiel ; je multiplie le diviseur $a+b$ par $-ab^3$, et j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende ; il vient $+a^2b^3+ab^4$. La réduction faite, on a ab^4+b^5 pour quatrième reste, ou pour cinquième dividende partiel.

5.° Je divise ab^4 par a ; il vient b^4 pour cinquième quotient partiel ; je multiplie $a+b$ par b^4, et j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende ; il vient $-ab^4-b^5$. La réduction faite, on a zéro pour reste. D'où je conclus que le quotient exact de la quantité a^5+b^5 divisée par $a+b$, est $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$.

66. *Remarque.* Quelquefois, après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport à une lettre, il se trouve plusieurs termes dans lesquels cette lettre a le même exposant. Alors il faut disposer tous ces termes dans une même colonne verticale, et regarder leur assemblage comme un même tout; mais chaque quotient partiel se détermine toujours de la même manière.

67. Exemple. *Diviser* $10a^3+11a^2b-19abc-15a^2c+3ab^2+15bc^2-5b^2c$,
par . . . . $3ab+5a^2-5bc$.

J'ordonne le dividende et le diviseur par rapport à la lettre a, et j'ai $10a^3+11a^2b-15a^2c-19abc+3ab^2+15bc^2-5b^2c$ à diviser par $5a^2+3ab-5bc$. Or, comme dans le dividende il y a deux termes qui contiennent a^2, et deux qui contiennent a, je dispose mon dividende et mon diviseur comme on le voit ici.

Dividende.	$10a^3+11a^2b-19abc+15bc^2-5b^2c$ $-15a^2c+3ab^2$, $-10a^3-6a^2b+10abc$,	Diviseur. $5a^2+3ab-5bc$
1.er reste	$5a^2b-9abc+15bc^2-5b^2c$ $-15a^2c+3ab^2$, $-5a^2b-3ab^2+5b^2c$,	Quotient. $2a+b-3c$.
2.e reste	$-15a^2c-9abc+15bc^2$, $+15a^2c+9abc-15bc^2$	
3.e reste	0	

1.° Je divise $10a^3$ par $5a^2$; il vient $2a$ au quotient; je multiplie le diviseur par $2a$, et j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende. Puis ayant fait la réduction, j'ai le premier reste écrit ci-dessus.

2.° Je divise le premier terme $5a^2b$ de ce reste par $5a^2$; il vient $+b$ au quotient; je multiplie le diviseur par $+b$; et ayant écrit le produit, avec des signes contraires, sous le dividende, puis ayant fait la réduction, on a un second reste écrit ci-dessus.

3.° Je divise le premier terme $-15a^2c$ de ce reste par $5a^2$; ensuite ayant fait les mêmes opérations que ci-devant, il ne reste rien. Ainsi la division est achevée; et le quotient exact est $2a + b - 3c$.

68. *Scholie.* Les commençants doivent beaucoup s'exercer à la pratique de la division. Ils acquerront l'habitude de faire cette opération facilement, et quelquefois même à la seule inspection du dividende et du diviseur, en multipliant ensemble des polynomes, et en divisant ensuite le produit par l'un des facteurs de la multiplication. C'est par les mêmes moyens qu'on apprend à décomposer les quantités en leurs facteurs, lorsqu'elles en ont d'autres qu'elles-mêmes et l'unité. Par exemple, qu'on ait la quantité $aa-bb$: on voit sans peine, avec un peu d'usage du calcul, que cette quantité est composée des deux facteurs $a+b$, $a-b$, ou bien que $aa-bb=(a+b)\times(a-b)$. On voit de même que $m^2+n^2=(m+n\sqrt{-1})\times(m-n\sqrt{-1})$; que $aa+2ab+bb=(a+b)\times(a+b)=(a+b)^2$. Ces sortes de décompositions ou de transformations sont d'un fréquent usage dans les calculs algébriques.

Usages des suites pour la division.

69. Il arrive souvent que, le diviseur étant complexe, la division ne peut pas se faire exactement. Par exemple, qu'on ait à diviser $a^2+2ab+bb+c^2$ par $a+b$; on trouvera que le quotient est $a+b$, et que le reste est c^2; de sorte qu'en indiquant la division de ce reste par le diviseur, le quotient total sera $a+b+\frac{c^2}{a+b}$.

Dans ce quotient, la partie fractionnaire $\frac{c^2}{a+b}$ a pour dénominateur un binome. Or, il y a une infinité de recherches analytiques dans lesquelles il est nécessaire ou commode que les termes d'une expression ne contiennent que des monomes, du moins aux dénominateurs. On leur donne cette forme par la division poussée indéfiniment, comme je vais l'expliquer sur un exemple.

70. Exemple. *Diviser à l'infini c^2 par $a+b$.*

Dividende c^2, Diviseur $a+b$

Quotient

$$\frac{c^2}{a} - \frac{c^2b}{a^2} + \frac{c^2b^2}{a^3} - \frac{c^2b^3}{a^4} + \frac{c^2b^4}{a^5} - \text{etc.}$$

$$-c^2 - \frac{c^2b}{a},$$

1.er reste $-\frac{c^2b}{a}$,

$$+\frac{c^2b}{a} + \frac{c^2b^2}{a^2},$$

2.e reste $+\frac{c^2b^2}{a^2}$,

$$-\frac{c^2b^2}{a^2} - \frac{c^2b^3}{a^3},$$

3.e reste $-\frac{c^2b^3}{a^3}$,

$$+\frac{c^2b^3}{a^3} + \frac{c^2b^4}{a^4},$$

4.e reste $+\frac{c^2b^4}{a^4}$,

$$-\frac{c^2b^4}{a^4} - \frac{c^2b^5}{a^5},$$

5e reste etc.

1.° Je divise le dividende c^2 par le premier terme a du diviseur, ou plutôt (58), j'indique cette division parce que le dividende c^2 et le diviseur a n'ont pas de lettres communes. Le quotient est $\frac{c^2}{a}$, que j'écris à la place où il doit

être. Je multiplie le diviseur $a+b$ par $\frac{c^2}{a}$, et j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende. Ensuite ayant fait la réduction, j'ai $-\frac{c^2b}{a}$ pour premier reste, ou pour second dividende partiel.

2.° Je divise ce dividende par le premier terme a du diviseur, et j'ai $-\frac{c^2b}{a^2}$ pour second quotient partiel, que j'écris à la suite du premier. Je multiplie le diviseur $a+b$ par $-\frac{c^2b}{a^2}$; et j'écris le produit, avec des signes contraires, sous le dividende. La réduction faite, j'ai $+\frac{c^2b^2}{a^2}$ pour second reste, ou pour troisième dividende partiel à diviser par $a+b$.

On continuera la division toujours de la même manière. Il est évident qu'elle n'aura pas de fin; et qu'elle donnera continuellement de nouveaux termes au quotient. Le quotient total sera donc exprimé par cette suite infinie :

$$\frac{c^2}{a}-\frac{c^2b}{a^2}+\frac{c^2b^2}{a^3}-\frac{c^2b^3}{a^4}+\frac{c^2b^4}{a^5}-\text{etc.}$$

Comme chaque terme de cette suite a c^2 pour un de ses facteurs, elle peut être écrite sous cette forme :

$$c^2\times\left(\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\text{etc.}\right)$$

71. *Remarque I.* On voit facilement que tous les termes de cette même suite iront en diminuant de grandeur, si $a>b$; et qu'au contraire ils iront en augmentant, si $a<b$.

En effet, comparons d'abord ensemble les deux premiers termes $\frac{1}{a}$ et $-\frac{b}{a^2}$, en faisant abstraction de leurs signes, ou en les supposant affectés du même signe. Si on a $a>b$ on aura aussi $\frac{1}{a}>\frac{b}{a^2}$; car puisque $a>b$, il est clair qu'en multipliant le premier membre, haut et bas, par a, on

aura $\frac{a}{a^2} > \frac{b}{a^2}$, ou bien $\frac{1}{a} > \frac{b}{a^2}$. Si au contraire on avoit $a<b$, on trouveroit $\frac{1}{a} < \frac{b}{a^2}$.

On fera voir d'une manière semblable qu'en supposant $a>b$; le second terme $\frac{b}{a^2}$ est plus grand que le troisième $\frac{b^2}{a^3}$; et qu'au contraire, en suppossnt $a<b$, le second terme $\frac{b}{a^2}$ est plus petit que le troisième $\frac{b^2}{a^3}$; ainsi de suite. D'où nous pouvons conclure, en général, que les termes de la suite iront en diminuant, ou en augmentant, selon que a sera plus grand, ou plus petit que b.

On appelle *suites convergentes* celles dont les termes vont en diminuant, et *suites divergentes* celles dont les termes vont en augmentant. Une suite peut converger ou diverger plus ou moins rapidement, selon que ses termes vont en diminuant, ou en augmentant, par des sauts plus ou moins grands.

72. *Remarque II.* Lorsqu'une suite converge rapidement, il suffit de prendre quelques termes du commencement, pour avoir, à peu de chose près, la valeur de la suite entière. Par exemple, ayant trouvé, par la méthode de l'article 69, que la valeur générale du quotient indiqué $\frac{1}{a+b}$, peut être exprimée par la suite infinie $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}$ — etc., si l'on suppose $a=100$, $b=1$, et qu'on prenne seulement les deux premiers termes de cette suite, on aura $\frac{1}{100} - \frac{1}{10000}$; ou $\frac{99}{10000}$, en réduisant les deux fractions au même dénominateur, puis soustrayant la seconde de la première. Or, cette dernière fraction ne diffère pas beaucoup de la fraction $\frac{1}{100+1}$, ou $\frac{1}{101}$, qui est la valeur

totale de la suite ; car réduisons les deux fractions $\frac{1}{101}$ et $\frac{99}{10000}$ au même dénominateur, pour pouvoir les comparer plus facilement ensemble ; elles deviendront respectivement $\frac{10000}{1010000}$ et $\frac{9999}{1010000}$; d'où l'on voit que leur différence est presque insensible.

On approcheroit davantage, et de plus en plus, de la valeur entière de la suite, en prenant ensemble ses trois premiers termes, ou ses quatre premiers termes, ainsi de suite.

Il est clair, par la raison contraire, que si une suite est divergente, on s'éloignera de plus en plus de sa valeur totale, à mesure qu'on prendra plus de termes du commencement. On ne peut donc prendre les premiers termes d'une suite qui en a une infinité, pour exprimer, à peu de chose près, sa valeur totale, que quand cette suite est convergente. Plus elle converge promptement, moins il faut prendre de termes du commencement, pour la représenter d'une manière approchée.

73. *Remarque III.* L'expression $\frac{1}{a+b}$ peut être développée en suite infinie, de deux manières, selon qu'on regardera a ou b comme le premier terme du diviseur. Dans le premier cas, la suite infinie est :

$$\text{(A)}\ \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \text{etc.}$$

Et dans le second, la suite infinie est :

$$\text{(B)}\ \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} - \frac{a^3}{b^4} + \frac{a^4}{b^5} - \text{etc.}$$

Or, lorsque $a > b$, la suite (A) est convergente, et la suite (B) est divergente ; au contraire, lorsque $a < b$, la suite (A) est divergente, et la suite (B) est convergente. Ainsi, lorsque $a > b$, il faut se servir de la suite (A) pour représenter le quotient indiqué $\frac{1}{a+b}$; et lorsque $a < b$, il faut se servir de la suite (B) pour représenter le même quotient.

74. *Remarque IV.* Si on avoit $a = b$, l'une ou l'autre suite deviendroit également :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \text{etc.}$$

Or, comme chaque terme est détruit par le terme suivant, il paroît s'ensuivre que la valeur totale de la suite est o, tandis que cette valeur doit être réellement $\frac{1}{2a}$ ou $\frac{1}{2b}$. Mais il faut prendre garde que dans ce cas la suite n'est pas convergente ; et que si l'on veut employer quelques-uns de ses termes pour exprimer la quantité $\frac{1}{2a}$, on ne peut pas se dispenser d'ajouter à ces termes le reste de la division, divisé par le diviseur.

Si, par exemple, on arrête la série au second terme $-\frac{1}{a}$; à la somme $\frac{1}{a} - \frac{1}{a}$ des deux premiers termes qu'on trouve (69) en divisant 1 par $a+a$, il faudra joindre le quotient du second reste 1 de la division, divisé par $a+a$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2a}$: alors on aura $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2a}$, pour la valeur de $\frac{1}{2a}$, comme cela doit être.

Si l'on arrête la série au troisième terme $+\frac{1}{a}$; à la somme $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$ des trois premiers termes provenants de la division, il faudra joindre le quotient du troisième reste -1 divisé par $2a$, c'est-à-dire, $-\frac{1}{2a}$: alors on aura $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2a}$, pour la valeur de $\frac{1}{2a}$. Ainsi de suite.

Division des quantités radicales.

75. Problème I. *Diviser un monome rationnel par un monome radical, ou un monome radical par un monome rationnel.*

La division ne peut alors que s'indiquer, en observant néanmoins que s'il y a des coëfficients, autres que l'unité, au-devant des quantités, ou que la quantité radicale soit précédée de quantités rationnelles, la division des coëfficients et des quantités rationnelles se fait comme on l'a expliqué ci-dessus. Ainsi, par exemple, en divisant $+a$ par $+\sqrt{b}$, on a pour quotient $+\frac{a}{\sqrt{b}}$, ou $+\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}$; en divisant $-8a\sqrt{c}$ par $+2ab$, on a pour quotient $-\frac{4\sqrt{c}}{b}$, ou $-\frac{4c^{\frac{1}{2}}}{b}$.

On doit observer qu'au lieu d'écrire, comme nous venons de faire, le quotient en forme de fraction, on écrit souvent le diviseur à côté du dividende, en donnant au diviseur un exposant négatif. Ainsi l'expression $+\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}$ est la même chose que $+ab^{-\frac{1}{2}}$; l'expression $-\frac{4c^{\frac{1}{2}}}{b}$ est la même chose que $-4c^{\frac{1}{2}}b^{-1}$. On traite à cet égard les quantités qui ont des exposants fractionnaires, comme celles qui ont pour exposants des nombres entiers (60).

76. Problème II. *Diviser un monome radical par un autre monome radical.*

Je distingue deux cas; l'un où les deux quantités radicales sont de même espèce, l'autre où elles sont de différentes espèces.

I.er CAS.

Supposons d'abord que le dividende et le diviseur soient des quantités radicales de même dénomination. Après avoir écrit le signe qui doit précéder le quotient, on écrira le signe radical commun au dividende et au diviseur, et, à la

suite de ce signe, le quotient des quantités divisées de la même manière que si elles n'étoient point affectées de radicaux. La division des coëfficients et des quantités rationnelles qui peuvent précéder les quantités radicales se fait à l'ordinaire. Ainsi, en divisant $+\sqrt{a^2b^3}$ par $-\sqrt{a}$, on a pour quotient $-\sqrt{ab^3}$, ou $-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, ou (en réduisant la fraction exponentielle de b à sa plus simple expression), $-a^{\frac{1}{2}}b$; en divisant $-8a^2\sqrt[3]{10m^2n^2}$ par $+4a\sqrt[3]{5mn}$, on a pour quotient $-2a\sqrt[3]{2mn}$, ou $-2a\times 2^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$, ou $-2^{\frac{4}{3}}am^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$.

On se rendra facilement raison de cette règle, en considérant que la division est une opération inverse de la multiplication, et que le produit du diviseur par le quotient doit toujours être une quantité égale au dividende. Ainsi, par exemple, je dis que si l'on divise $-\sqrt{a}$ par $+\sqrt{b}$, le quotient sera $-\sqrt{\frac{a}{b}}$. En effet, si l'on multiplie (51) cette dernière quantité par $+\sqrt{b}$, on aura $-\sqrt{\frac{ab}{b}}$, ou $-\sqrt{a}$, qui est le dividende proposé. Il en sera de même dans tous les autres cas pareils.

IIe CAS.

Lorsque le divivende et le diviseur ne sont pas des quantités radicales de même dénomination, on peut les réduire à la même dénomination (51); et alors ce cas revient au précédent. Qu'on ait, par exemple, à diviser $-\sqrt[3]{a^3b^2}$ par $+\sqrt[2]{a}$: je réduis les deux quantités radicales à la même dénomination; la première devient $-\sqrt[6]{a^6b^4}$, ou $-a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}$; la seconde devient $+\sqrt[6]{a^3}$, ou $+a^{\frac{3}{6}}$; et, en divisant la première par la seconde, j'ai pour quotient $-\sqrt[6]{a^3b^4}$, ou $-a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{4}{6}}$, ou $-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$.

77. Problême III. *Faire une division de polynomes, lorsqu'il y entre des quantités radicales.*

La solution de ce problême dépend immédiatement de ce qui précède.

78. Exemple. *Diviser* $a^3b^2 - 7a^2b^3 + 7abc\sqrt{m^2np} - 5a^2b^2\sqrt[3]{a^2c} + 35ab^3\sqrt[3]{a^2c} - 35bc\sqrt[6]{m^6n^3p^3a^4c^2}$,
par .... $ab - 5b\sqrt[3]{a^2c}$.

On fera cette opération à l'ordinaire, en divisant successivement les différentes parties du dividende par le premier terme du diviseur, et retranchant du dividende, à chaque division partielle, le produit du quotient partiel par le diviseur entier. Il n'y aura point de difficulté á l'égard de la division ou multiplication des quantités radicales, puisque toutes les opérations partielles se font sur des monomes, et qu'elles ne demandent par conséquent point d'autres règles que celles que nous avons données pour ces dernières quantités. On trouvera ainsi que le quotient demandé est $a^2b - 7ab^2 + 7c\sqrt{m^2np}$.

CHAPITRE VI.

Des fractions algébriques.

79. Les fractions littérales sont, comme les fractions numériques, les quotients des numérateurs divisés par les dénominateurs. Ainsi tout ce que nous avons dit au sujet des fractions numériques s'applique également aux fractions littérales, en substituant aux opérations arithmétiques les opérations algébriques correspondantes, c'est-à-dire addition à addition, soustraction à soustraction, etc. On verra, par cette correspondance, la raison de la plupart des calculs que je vais faire sur les fractions littérales, et cela nous épargnera beaucoup de raisonnements.

80. Problème I. *Réduire une quantité entière en une fraction qui ait un dénominateur donné.*

Soit la quantité a qu'il s'agit de réduire en une fraction qui ait le dénominateur b. Je multiplie a par b, et j'ap-

plique sous le produit ab, le dénominateur b; en sorte que a est la même chose que $\frac{ab}{b}$.

81. *Corollaire.* On voit semblablement que toute fraction peut être transformée en une autre de même valeur, en multipliant ou divisant son numérateur et son dénominateur par une même quantité. Ainsi la fraction $\frac{a}{b}$ devient (en multipliant haut et bas par c), $\frac{ac}{bc}$; la fraction $\frac{aa+ab}{aa-bb}$ devient (en divisant haut et bas par $a+b$), $\frac{a}{a-b}$.

82. Problême II. *Réduire en une seule fraction une quantité composée d'un entier et d'une fraction.*

Multipliez l'entier par le dénominateur de la fraction, et appliquez sous le tout ce dénominateur. Ainsi $a+\frac{bd}{c}$ devient $\frac{ac+bd}{c}$; $a+\frac{ac-cd-ad}{c+d}$ devient $\frac{ac+ad+ac-cd-ad}{c+d}$, ou $\frac{2ac-cd}{c+d}$, en faisant la réduction du numérateur.

83. Problême III. *Tirer les entiers qui peuvent se trouver dans une fraction.*

Divisez le numérateur par le dénominateur, autant que cela sera possible. Ainsi, ayant la fraction $\frac{a^2+ab-cd}{a}$, je divise les deux premiers termes du numérateur par a, et je la réduis par ce moyen à cette quantité $a+b-\frac{cd}{a}$. De même, la fraction $\frac{a^2-2ab+b^2+c^2}{a-b}$ devient $a-b+\frac{c^2}{a-b}$, en divisant les trois premiers termes du numérateur par $a-b$.

84. Problême IV. *Réduire plusieurs fractions au même dénominateur.*

Multipliez le numérateur et le dénominateur de cha-

cune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres, et appliquez, sous chaque nouveau numérateur, le produit de tous les dénominateurs. Ainsi les fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, se changent respectivement en celles-ci $\frac{adf}{bdf}, \frac{bcf}{bdf}, \frac{bde}{bdf}$, qui ont le même dénominateur.

L'opération se feroit de même, si le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux, étoient des quantités complexes. Ainsi les deux fractions $\frac{a-b}{b+c}, \frac{g+h}{f+e}$, deviennent $\frac{(a-b)\times(f+e)}{(b+c)\times(f+e)}, \frac{(g+h)\times(b+c)}{(b+c)\times(f+e)}$, ou bien (en effectuant les multiplications), $\frac{af-bf+ae-be}{bf+cf+be+ce}, \frac{bg+bh+cg+ch}{bf+cf+be+ce}$.

85. *Remarque*. Lorsque les fractions ont des facteurs communs à leurs dénominateurs, elles peuvent être réduites à la même dénomination d'une manière abrégée, qui est utile dans la pratique du calcul. Soient, par exemple, les deux fractions $\frac{a^3}{bc}, \frac{dfg}{bh}$, dont les dénominateurs ont le facteur commun b : je vois qu'en multipliant la première, haut et bas, par le facteur non commun h du dénominateur de la seconde, et la seconde, aussi haut et bas, par le facteur non commun c du dénominateur de la première, je les réduirai tout de suite au même dénominateur. Elles deviendront ainsi $\frac{a^3h}{bch}, \frac{cdfg}{bch}$.

86. Problème V. *Ajouter des fractions avec d'autres quantités entières ou rompues.*

Ecrivez toutes les quantités à ajouter, les unes à la suite des autres, avec les signes qu'elles ont, et faites les réductions dont la somme peut être susceptible. Qu'on ait à ajouter ensemble la quantité entière $a-b$, et la fraction $\frac{b^2}{a+b}$: j'écris $a-b+\frac{b^2}{a+b}$, et, en réduisant l'entier en

une fraction qui ait le dénominateur $a+b$, j'ai $\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}$, c'est-à-dire $\frac{a^2}{a+b}$. Pour ajouter ensemble les trois fractions $+\frac{a}{b}$, $-\frac{c}{d}$, $+\frac{e}{f}$, j'écris $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$. Si on réduit ces trois fractions au même dénominateur, on aura $\frac{adf}{bdf}-\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}$, ou bien $\frac{adf-bcf+bde}{bdf}$.

87. Problême VI. *Faire la soustraction des quantités où il se trouve des fractions.*

Changez les signes de la quantité que vous devez soustraire, et, en cet état, écrivez-la à la suite de celle dont elle doit être soustraite. Ainsi, pour retrancher $\frac{b^2}{a+b}$ de $a-b$, j'écris $a-b-\frac{b^2}{a+b}$; et, en réduisant tout en fraction, je trouve $\frac{a^2-b^2-b^2}{a+b}$, ou bien $\frac{a^2-2b^2}{a+b}$. Pour soustraire $-a$ de $\frac{aa}{a-b}$, j'écris $\frac{aa}{a-b}+a$, ou bien $\frac{aa+aa-ab}{a-b}$, ou $\frac{2aa-ab}{a-b}$. Pour soustraire la fraction $-\frac{c}{d}$ de la fraction $\frac{a}{b}$, j'écris $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, et, en réduisant les deux fractions au même dénominateur, on aura $\frac{ad+bc}{bd}$ pour résultat de la soustraction.

88. Problême VII. *Multiplier ensemble un entier et une fraction, ou une fraction par une fraction.*

1.° Soit à multiplier l'entier $-3a$ par la fraction $\frac{m}{n}$, ou la fraction $\frac{m}{n}$ par l'entier $-3a$; je multiplie ensemble l'entier et le numérateur de la fraction, et j'applique le dénominateur sous le produit; ce qui donne $-\frac{3am}{n}$.

2.° Soit à multiplier ensemble les deux fractions $-\frac{5a}{b}$ et $\frac{4f}{c}$: je multiplie numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur; ce qui donne $-\frac{20af}{bc}$ pour le produit demandé.

3.° Soit à multiplier la fraction radicale $\sqrt[m]{\frac{p}{q}}$ par la fraction radicale $\sqrt[n]{\frac{g}{h}}$; j'observe que $\sqrt[m]{\frac{p}{q}}=\frac{\sqrt[m]{p}}{\sqrt[m]{q}}$, et que $\sqrt[n]{\frac{g}{h}}=\frac{\sqrt[n]{g}}{\sqrt[n]{h}}$; alors il s'agit de multiplier $\frac{\sqrt[m]{p}}{\sqrt[m]{q}}$ par $\frac{\sqrt[n]{g}}{\sqrt[n]{h}}$; ce qui se fait, comme pour les fractions rationnelles, en multipliant numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur; le produit demandé est donc $\frac{\sqrt[m]{p}\,.\,\sqrt[n]{g}}{\sqrt[m]{q}\,.\,\sqrt[n]{h}}$, ou $\frac{\sqrt[mn]{p^n g^m}}{\sqrt[mn]{q^n h^m}}$, ou $\sqrt[mn]{\frac{p^n g^m}{q^n h^m}}$.

89. Problème VIII. *Diviser une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, ou une fraction par une fraction.*

1.° Soit la fraction $\frac{m}{n}$ à diviser par l'entier $-3a$: je conserve le numérateur de la fraction, et je multiplie le dénominateur par $-3a$; ce qui donne $\frac{m}{-3an}$, ou $-\frac{m}{3an}$ pour le quotient cherché.

2.° Soit à diviser l'entier $-3a$ par la fraction $\frac{m}{n}$: je renverse la fraction diviseur, et alors il s'agit de multiplier $-3a$ par $\frac{n}{m}$; ce qui donne $-\frac{3an}{m}$ pour le quotient cherché.

3.° De même, pour diviser la fraction $\frac{p}{q}$ par $\frac{m}{n}$, il faut

renverser la fraction diviseur, et multiplier ensemble les deux fractions $\frac{p}{q}, \frac{n}{m}$; le quotient cherché est donc $\frac{pn}{mq}$.

4.° Soit à diviser $\sqrt[m]{\frac{p}{q}}$ par $\sqrt[n]{\frac{g}{h}}$: la fraction dividende est la même chose que $\frac{\sqrt[m]{p}}{\sqrt[m]{q}}$, et la fraction diviseur est la même chose que $\frac{\sqrt[n]{g}}{\sqrt[n]{h}}$; je renverse cette dernière fraction, et alors il s'agit de multiplier $\frac{\sqrt[m]{p}}{\sqrt[m]{q}}$ par $\frac{\sqrt[n]{h}}{\sqrt[n]{g}}$; ce qui donne $\frac{\sqrt[mn]{p^n h^m}}{\sqrt[mn]{q^n g^m}}$, ou $\sqrt[mn]{\frac{p^n h^m}{q^n g^m}}$, pour le quotient cherché.

90. Problème IX. *Réduire une fraction à ses moindres termes.*

Après avoir ordonné les deux termes de la fraction par rapport à une même lettre, il faut diviser celui des deux termes où cette lettre a le plus grand exposant, par le second, et pousser l'opération tant qu'elle est possible, conformément aux règles ordinaires de la division; ensuite il faut diviser, suivant les mêmes conditions, le second terme par le premier reste; puis le premier reste par le second reste; ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une division exacte : alors le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction proposée. Si on ne pouvoit pas parvenir à faire une division exacte, la fraction seroit irréductible. On voit que le procédé est absolument le même pour les fractions littérales que pour les fractions numériques. Avant que d'appliquer cette règle à des exemples, nous ferons quelques observations qui tendent à simplifier le calcul.

On ne change rien au commun diviseur de deux quantités, en multipliant ou en divisant l'une de ces quantités par un facteur qui n'est pas diviseur de l'autre. Qu'on ait,

par exemple, la fraction $\frac{ab}{ac}$, dont les deux termes ont a pour diviseur commun : en multipliant le numérateur ou le dénominateur par une quantité d, on formera la nouvelle fraction $\frac{abd}{ac}$, ou $\frac{ab}{acd}$, dont les deux termes n'ont pas d'autre diviseur commun que a. Mais si la quantité par laquelle on multiplie un des termes de la fraction étoit diviseur de l'autre terme, alors on changeroit le diviseur commun. Par exemple, qu'on multiplie le numérateur de la fraction $\frac{ab}{ac}$ par c, qui est diviseur du dénominateur, on formera la fraction $\frac{abc}{ac}$ dont les deux termes ont, pour diviseur commun, ac, et non pas simplement a comme tout-à-l'heure. De même, si l'on multiplie le dénominateur de la fraction $\frac{ab}{ac}$, par b, qui est le diviseur du numérateur, on formera la fraction $\frac{ab}{abc}$, dont les deux termes ont pour diviseur commun ab, et non a simplement. On ne conserve donc le même diviseur commun aux deux termes d'une fraction, qu'en multipliant ou en divisant l'un de ces termes par une quantité qui ne soit pas diviseur de l'autre.

91. Exemple. *Réduire à ses moindres termes la fraction* $\frac{a^3 + ab^2 - a^2b - b^3}{4a^4 - 2a^2b^2 - 4a^3b + 2ab^3}$.

J'ordonne tout par rapport à la lettre a, et je prends le dénominateur pour dividende, et le numérateur pour diviseur. Cela posé,

1.° Comme $2a$ divise tous les termes du dividende, et ne divise pas ceux du diviseur, je commence par délivrer le dividende de ce diviseur, pour simplifier l'opération. il me vient ainsi $2a^3 - 2a^2b - ab^2 + b^3$ à diviser par $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$. Le quotient est 2, et le reste $-3ab^2 + 3b^3$.

2.° Je prends pour dividende le diviseur $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, et pour diviseur le premier reste $-3ab^2 + 3b^3$. Et comme

$3b^2$ est diviseur de ce reste, sans l'être du nouveau dividende, je délivre mon diviseur actuel du facteur $3b^2$. Par ce moyen, j'ai $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ à diviser par $-a+b$. Il vient pour quotient exact $-a^2-b^2$. D'où je conclus que $-a+b$ est le plus grand commun diviseur cherché. Divisant donc les deux termes de la fraction proposée $\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{4a^4-4a^3b-2a^2b^2+2ab^3}$ par $-a+b$, elle deviendra $\frac{-a^2-b^2}{-4a^3+2ab^2}$, ou $\frac{a^2+b^2}{4a^3-2ab^2}$, et sera réduite à ses moindres termes.

Des fractions continues.

92. J'ai déja fait connoître dans l'*arithmétique* la nature des fractions continues; ici je vais les considérer sous un point de vue plus général.

Lorsqu'une fraction a pour dénominateur l'assemblage d'un entier et d'une fraction; que cette seconde fraction a pour dénominateur l'assemblage d'un entier et d'une fraction; que cette troisième fraction a pour dénominateur l'assemblage d'un entier et d'une fraction; ainsi de suite: l'expression composée de toutes ces fractions particulières est ce qu'on appelle une *fraction continue*, soit que le nombre des fractions intégrantes soit fini ou infini. Ainsi, l'expression

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\text{etc.}}}}}}$$

est une fraction continue.

93. Si chacun des numérateurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. vaut 1, l'expression précédente deviendra

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}}$$

Les fractions continues que nous avons considérées dans l'arithmétique ont cette dernière forme.

94. Toute fraction continue peut être réduite en une

fraction ordinaire. Soit, par exemple, la fraction continue,

$$\frac{\alpha}{a+\frac{\beta}{b+\frac{\gamma}{c+\frac{\delta}{d}}}}.$$

1.° L'assemblage $\frac{\gamma}{c+\frac{\delta}{d}}$ des deux dernières fractions intégrantes étant une fraction qui a γ pour numérateur, et $c+\frac{\delta}{d}$ pour dénominateur; il est clair que si nous réduisons ce dénominateur en la fraction équivalente $\frac{cd+\delta}{d}$, l'assemblage en question pourra être regardé comme une fraction qui a γ pour numérateur, et $\frac{cd+\delta}{d}$ pour dénominateur, ou, ce qui revient au même, comme le quotient de la quantité γ divisée par la fraction $\frac{cd+\delta}{d}$, ce qui donne (89), $\frac{\gamma d}{cd+\delta}$.

2.° A la place de l'assemblage des trois dernières fractions intégrantes, nous pouvons substituer $\frac{\beta}{b+\frac{\gamma d}{cd+\delta}}$; d'où l'on tire, en opérant comme nous venons de faire sur l'assemblage des deux dernières fractions intégrantes, $\frac{\beta cd+\beta\delta}{bcd+b\delta+\gamma d}$.

3.° Pareillement, au lieu de l'assemblage des quatre fractions intégrantes, nous pouvons prendre $\frac{\alpha}{a+\frac{\beta cd+\beta\delta}{bcd+b\delta+d\gamma}}$; d'où l'on tire la fraction ordinaire $\frac{\alpha bcd+\alpha b\delta+\alpha d\gamma}{abcd+ab\delta+ad\gamma+\beta cd+\beta\delta}$, expression de la fraction continue proposée.

Il est clair que si une fraction continue avoit un plus grand nombre de termes, on parviendroit toujours, en remontant de proche en proche, de droite à gauche, à la convertir en une fraction ordinaire.

95. Nommons A la valeur totale d'une fraction continue, telle que

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\text{ etc.}}}}}}$$

Il est aisé de voir que, si, en allant de gauche à droite, on prend d'abord la première fraction intégrante seule, puis les deux premières fractions intégrantes seules, puis les trois premières fractions intégrantes seules, ainsi de suite, on aura des quantités alternativement plus grandes et plus petites que A ; c'est-à-dire, que

$$A<\frac{\alpha}{a},\ A>\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b}},\ A<\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c}}},\ A>\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d}}}}\text{ etc.}$$

Car dans la première expression $\frac{\alpha}{a}$ le dénominateur a est plus petit que le vrai dénominateur, puisque ce dernier est formé de l'addition de a avec toutes les fractions qui suivent à droite. Or on augmente la valeur d'une fraction lorsqu'on diminue son dénominateur sans toucher à son numérateur. Ainsi on a $A<\frac{\alpha}{a}$. Dans la seconde expression $\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b}}$, le dénominateur b étant évidemment trop petit, la fraction $\frac{\beta}{b}$ est trop grande, et par conséquent aussi l'assemblage $a+\frac{\beta}{b}$ est trop grand; donc notre expression qui a pour numérateur α, et pour dénominateur l'assemblage dont nous venons de parler, est trop petite, puisqu'on diminue la valeur d'une fraction, lorsqu'on augmente son dénominateur. En raisonnant toujours ainsi de suite pour les autres expressions, on reconnoîtra la vérité de la proposition générale que nous avons avancée.

96. Il suit de là que si nous réduisons chacune des expressions dont nous venons de parler en fractions ordinaires, on aura :

$$A < \frac{\alpha}{a},$$

$$A > \frac{\alpha b}{ab + \beta},$$

$$A < \frac{\alpha bc + \alpha\gamma}{abc + a\gamma + \beta c},$$

$$A > \frac{\alpha bcd + \alpha b\delta + \alpha\gamma d}{abcd + ab\delta + a\gamma d + \beta cd + \beta\delta},$$

ainsi de suite alternativement.

97. Les fractions continues appliquées aux nombres servent, comme nous l'avons vu dans l'arithmétique, à représenter d'une manière approchée avec de petits nombres la valeur d'une fraction irréductible exprimée par de grands nombres. L'approximation est d'autant plus exacte, qu'on prend plus de fractions intégrantes du commencement de la suite; mais aussi plus on prend de ces fractions, plus les termes de la fraction résultante qu'elles donnent sont grands.

98. Les fractions résultantes qu'on trouve ainsi en prenant un certain nombre des premières fractions intégrantes qui composent la fraction continue, ont la propriété d'être irréductibles, et de donner la valeur de la fraction principale d'une manière plus approchée que ne la donneroit une fraction exprimée par de plus petits nombres. On en verra facilement la raison, en considérant qu'on emploie des opérations semblables pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, et pour développer une fraction ordinaire en fraction continue. Montrons ici en général la correspondance de ces opérations.

99. Qu'il s'agisse de réduire à ses moindres termes la fraction $\frac{A}{B}$, dans laquelle A et B sont des nombres donnés. Soit $B > A$, et supposons qu'en divisant B par A on ait a

pour quotient, et α pour reste; qu'en divisant A par α, on ait b pour quotient, et β pour reste; qu'en divisant α par β, on ait c pour quotient, et γ pour reste; ainsi de suite. Il est clair que la fraction proposée pourra subir les transformations suivantes (en mettant successivement pour chaque dividende le produit du diviseur par le quotient, et ajoutant le reste de la division):

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{aA+\alpha},$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\alpha b+\beta}{a(\alpha b+\beta)+\alpha},$$

$$\frac{A}{B}=\frac{b(\beta c+\gamma)+\beta}{a(b\beta c+b\gamma+\beta)+\beta c+\gamma},$$

$$\frac{A}{B}=\frac{b(cd\gamma+c\delta+\gamma)+\gamma d+\delta}{a(bc\gamma d+bc\delta+b\gamma+d\gamma+\delta)+c\gamma d+c\delta+\gamma};$$

etc.

Ces expressions indiquent en général la marche qu'on suit dans la décomposition des deux nombres A et B pour parvenir à trouver leur plus grand commun diviseur. On voit que si, par exemple, dans la dernière de ces expressions, le dernier reste δ divise le reste précédent γ, la fraction $\frac{A}{B}$ sera réductible, et que δ sera le plus grand commun diviseur de ses deux termes.

100. Développons maintenant la même fraction $\frac{A}{B}$ en fraction continue, par la méthode donnée (Arith. 124); en divisant les deux termes par A, cette fraction devient $\frac{1}{\frac{B}{A}}$. Supposons, comme tout-à-l'heure, que le quotient de B divisé par A est a, et que le reste est α; la fraction deviendra $\frac{1}{a+\frac{\alpha}{A}}$. Divisant par α les deux termes de $\frac{\alpha}{A}$, on aura $\frac{A}{B}=\frac{1}{a+\frac{1}{\frac{A}{\alpha}}}$. Soit b le quotient de A divisé par α, et β le reste;

on aura $\frac{A}{B}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$. En continuant d'opérer de la même manière, on trouvera

$$\frac{A}{B}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}}$$

Or, je dis, 1.° que si, en allant de gauche à droite, on arrête cette suite à telle fraction intégrante qu'on voudra, le résultat qu'on obtiendra, étant converti en une fraction ordinaire, sera une fraction irréductible. Car, par exemple, arrêtons-nous à la fraction intégrante $\frac{1}{c}$, en excluant toutes les suivantes à droite : nous aurons la fraction continue $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$, qui, étant réduite en fraction ordinaire, devient $\frac{bc+1}{abc+a+c}$. Or, cette dernière fraction est irréductible; car, si elle étoit réductible, on pourroit diviser ses deux termes par un même nombre plus grand que 1. Soit g ce nombre; alors $\frac{bc+1}{g}$ et $\frac{abc+a}{g}$ ou $\frac{a(bc+1)}{g}$ seroient des entiers. De plus, $\frac{abc+a+c}{g}$ seroit un entier. Donc $\frac{c}{g}$ seroit un entier, ainsi que $\frac{bc}{g}$. Or, si les nombres $\frac{bc+1}{g}$ et $\frac{bc}{g}$ étoient des entiers, $\frac{1}{g}$ seroit un entier; ce qui est impossible, puisque g est >1.

2.° Je dis qu'on ne peut pas approcher davantage de la valeur de la fraction $\frac{A}{B}$ au moyen d'une fraction qui soit exprimée par de plus petits nombres que la fraction $\frac{bc+1}{abc+a+c}$. Car, désignons, pour abréger, cette dernière fraction par

$\frac{C}{D}$; et considérons que puisque les deux fractions $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ contiennent l'une et l'autre les fractions intégrantes $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, toute fraction qu'on prétendra qui approche plus de $\frac{A}{B}$ que n'en approche $\frac{C}{D}$, contiendra nécessairement les mêmes fractions intégrantes, et de plus quelque autre fraction intégrante que je désigne par $\frac{1}{m}$. Ainsi, cette fraction, plus voisine de $\frac{A}{B}$, sera $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{m}}}}$, ou bien $\frac{bcm+b+m}{abcm+ab+am+cm+1}$. Or, il est clair que cette dernière fraction est irréductible; car, si elle étoit réductible, on pourroit diviser ses deux termes par un même nombre plus grand que 1; je l'appelle h. Alors $\frac{bcm+b+m}{h}$ et $\frac{a(bcm+b+m)}{h}$ seroient des entiers. De plus le nombre $\frac{a(bcm+b+m)+cm+1}{h}$ seroit un entier. Donc $\frac{cm+1}{h}$ en seroit aussi un, ainsi que $\frac{bcm+b}{h}$. Les nombres $\frac{bcm+b+m}{h}$ et $\frac{bcm+b}{h}$ étant des entiers, $\frac{m}{h}$ seroit aussi un entier, de même que $\frac{cm}{h}$. Enfin $\frac{cm+1}{h}$ et $\frac{cm}{h}$ étant des entiers, $\frac{1}{h}$ seroit un entier; ce qui est impossible, puisque $h > 1$.

D'un autre côté la fraction $\frac{bcm+b+m}{abcm+ab+am+cm+1}$ est exprimée par de plus grands nombres que la fraction $\frac{C}{D}$.

Donc il n'y a point de fraction qui, étant exprimée par de plus petits termes que ceux de la fraction $\frac{C}{D}$, approche plus que cette même fraction, de la fraction principale $\frac{A}{B}$

CHAPITRE VII.

De la formation des puissances, et de l'extraction des racines des quantités algébriques.

101. Les notions que nous avons données, dans l'*arithmétique*, de la formation des puissances des nombres et de l'extraction de leurs racines, s'appliquent ici en général aux quantités littérales. Former une puissance d'une quantité littérale, ou, ce qui signifie la même chose, élever une quantité littérale à une puissance proposée, c'est multiplier cette quantité un certain nombre de fois par elle-même : extraire la racine d'une quantité, c'est trouver une autre quantité qui, étant multipliée un certain nombre de fois par elle-même, produise la première. On voit que l'un de ces problèmes est l'inverse de l'autre. Ils ne demandent, pour être résolus, qu'une application ou une extension très-facile des principes que nous avons établis pour la multiplication et la division des quantités tant rationnelles que radicales. Mais afin qu'il ne reste aux commençants aucune difficulté sur toute cette théorie, je crois devoir la développer en détail.

102. Puisque, suivant la règle que nous avons donnée (35) pour la multiplication des signes, $+\times+$ et $-\times-$ donnent également $+$, et que $+\times-$, ou $-\times+$, donnent $-$, il s'ensuit que :

1.° Le quarré de $+a$, c'est-à-dire $+a\times+a$, et celui de $-a$, c'est-à-dire $-a\times-a$, sont également $+aa$;

2.° Le cube de $+a$, c'est-à-dire $+aa\times+a$, est $+a^3$; mais celui de $-a$, c'est-à-dire $+aa\times-a$, est $-a^3$;

3.° La quatrième puissance de $+a$, c'est-à-dire $+a^3\times+a$, est $+a^4$, et celle de $-a$, c'est-à-dire $-a^3\times-a$, est également $+a^4$;

4.° La cinquième puissance de $+a$, c'est-à-dire $+a^4\times+a$, est $+a^5$; mais celle de $-a$, c'est-à-dire $+a^4\times-a$, est $-a^5$.

Ainsi de suite. Par où l'on voit en général que toutes les puissances *paires* sont positives, soit que la quantité génératrice, ou la racine, ait le signe + ou le signe —; mais que les puissances *impaires* sont toujours de même signe que la racine, c'est-à-dire positives, si la racine est positive, et négatives, si la racine est négative.

103. Problême I. *Former les puissances de toutes sortes de monomes, rationnels ou radicaux.*

1.° On aura égard à la règle des signes, conformément à l'article précédent. 2.° Si les coëfficients sont autres que l'unité, on en formera les puissances, conformément aux règles de l'arithmétique. 3.° Pour élever les lettres du monome au quarré, au cube, à la quatrième puissance, etc., il faut (48) ou doubler, ou tripler, ou quadrupler, ou, etc., les exposants de ces lettres.

Si le monome est fractionnaire, il faudra former, comme on vient de l'expliquer, les puissances de chacun des termes de la fraction.

Exemples pour les entiers rationnels.

Le quarré de $+ab$, ou de $+a^1b^1$ est $+a^2b^2$; le quarré de $-5a^2b^3$ est $+25a^4b^6$; le cube de $+2a^2bc$ est $+8a^6b^3c^3$; le cube de $-4a^3b^2c$ est $-64a^9b^6c^3$.

Exemples pour les entiers radicaux.

Le quarré de $+\sqrt{ab}$, ou de $+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, est $+a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{2}{2}}$, ou $+a^1b^1$, ou $+ab$; le cube de $-\sqrt[3]{ab}$, ou de $-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, est $-a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{3}{3}}$, ou $-ab$.

Exemples pour les fractions.

Le quarré de $+\frac{a}{b}$ est $+\frac{a^2}{b^2}$; le cube de $-\frac{5a}{6b}$ est $-\frac{125\,a^3}{216\,b^3}$.

104. Problême II. *Extraire une racine quelconque d'un monome quelconque.*

Cette opération étant l'inverse de l'élévation aux puissances, il est clair,

1.° Par rapport au signe qui doit affecter une racine, que

ce signe peut être (102) indifféremment + ou —, s'il s'agit de tirer une racine *paire*; mais qu'il est *unique* et le même que celui de la quantité dont il s'agit d'extraire la racine, si cette racine est *impaire*;

2.° Par rapport aux coëfficients, que les racines de ces nombres doivent être tirées suivant les règles de l'arithmétique;

3.° Par rapport aux exposants, qu'il faut prendre la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou la cinquième partie, etc., des exposants des lettres qui composent une quantité monome, selon qu'on veut tirer la racine quarrée, ou cube, ou quatrième, ou cinquième, etc., de cette quantité.

Exemples pour les entiers rationnels.

La racine quarrée de $+a^2$ est $+a$ ou $-a$, ce qu'on exprime ainsi $\sqrt{a^2} = \pm a$; la racine quarrée de $+25a^4b^6$ est $\pm 5a^2b^3$; la racine cube de $-a^3$ est $-a$; celle de $+343a^6b^9$ est $+7a^2b^3$.

On voit que, dans ces exemples, les exposants des quantités dont il a fallu tirer la racine ont été divisibles par l'exposant ou l'indice de cette racine, et qu'on a eu par conséquent des nombres entiers pour quotients. Voici des exemples où la division ne peut pas se faire exactement, et où par conséquent la racine ne peut que s'indiquer, du moins en partie. La racine quarrée de $+a$ ou de a^1 est $\pm a^{\frac{1}{2}}$, ou $\pm \sqrt{a}$; celle de a^3 est $\pm a^{\frac{3}{2}}$, ou $\pm a.a^{\frac{1}{2}}$, ou $\pm a\sqrt{a}$; la racine cube de $-a^5b^7$ est $-a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}$, ou $-ab^2.\, a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, ou $-ab^2\sqrt[3]{a^2b}$.

Exemples pour les entiers radicaux.

La racine quarrée de $+\sqrt{a}$, ou de $+a^{\frac{1}{2}}$, est $\pm a^{\frac{1}{4}}$; celle de $+25\sqrt[3]{a^2b}$, ou de $25\,a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, est $\pm 5a^{\frac{2}{6}}b^{\frac{1}{6}}$, ou $\pm 5\sqrt[6]{a^2b}$.

Exemples pour les fractions.

La racine quarrée de la fraction $+\frac{a^2}{b^4}$ est $\pm\frac{a}{b^2}$; celle de $+\frac{25a^2b^2}{64m^4n^6}$ est $\pm\frac{5ab}{8m^2n^3}$.

Il est clair que dans tous les cas les extractions des racines des fractions n'ont pas d'autres difficultés que les extractions des racines des quantités entières, puisque l'opération se réduit à tirer séparément la racine du numérateur et celle du dénominateur.

105. *Remarque.* Il est essentiel d'observer que les puissances paires étant toujours affectées (102) du signe +, quel que soit celui de la racine; une quantité dont on propose d'extraire une racine *paire* doit nécessairement être affectée du signe +, si l'on veut qu'elle ait une racine réelle. Les racines paires des quantités négatives sont donc impossibles ou *imaginaires*. Ainsi les expressions suivantes $\sqrt{-aa}$, $\sqrt[4]{-a^2b^2}$, $\sqrt[6]{-8a^2}$, sont des racines imaginaires. Quoique ces sortes de racines ne représentent rien d'existant, elles peuvent néanmoins être soumises aux mêmes règles de calcul que les quantités réelles, parce que l'algèbre opère sur les quantités inconnues comme sur les quantités connues, et que souvent on ne voit qu'à la fin d'un calcul s'il y entre ou non des quantités imaginaires. Si dans le résultat d'une opération il se trouve de telles quantités, cela signifie que la question qui a donné lieu à ce résultat renferme quelque absurdité dans ses conditions. Si les facteurs d'un produit contiennent des racines imaginaires, et que cependant le produit n'en contienne pas, comme cela arrive quelquefois; alors les imaginaires se détruisent mutuellement; ensorte que, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'*imaginarité* qui entre dans l'un des éléments de la question est anéantie par l'imaginarité qui entre dans un autre élément. Tout cela sera pleinement éclairci dans la suite.

106. *Scholie.* Souvent on rencontre des quantités affectées de signes radicaux, et décomposables en facteurs, dont quelques-uns peuvent être délivrés du signe radical. Alors ces quantités peuvent être mises sous une forme plus simple, par un moyen que nous avons déja indiqué. Soit, par exemple, la quantité $\sqrt{50a^2b^3}$: j'observe que le coëfficient 50 peut être décomposé en ces deux facteurs 25 et 2, dont le premier est un quarré parfait, et que la quantité littérale a^2b^3 peut être décomposé en ces deux facteurs a^2b^2 et b, dont le premier est aussi un quarré parfait. Ainsi, en tirant les racines des quarrés parfaits, et laissant les autres facteurs sous le radical, on transformera la quantité proposée $\sqrt{50a^2b^3}$ en celle-ci, $5ab\sqrt{2b}$.

De même, la quantité $\sqrt[3]{[a^3b + a^3c]}$ peut être écrite ainsi, $a\sqrt[3]{[b+c]}$, en observant que $a^3b + a^3c$ est décomposable en ces deux facteurs a^3 et $b + c$, dont le premier a pour racine cube a, et laissant sous le signe radical l'autre facteur $b + c$, qui n'est pas un cube.

La racine imaginaire $\sqrt{-aa}$ peut être écrite sous cette forme $a\sqrt{-1}$, en observant que $-aa$ peut se décomposer en ces deux facteurs $+aa$ et -1, dont le premier est le quarré de a, et le second, qui n'est point un quarré, doit être laissé sous le radical.

Il est clair que réciproquement une quantité écrite au devant d'un signe radical peut être transportée sous ce signe, en l'élevant à la puissance désignée par l'indice du même signe. Ainsi, $a\sqrt{b}$ est la même chose que $\sqrt{a^2b}$; $2a\sqrt[3]{m}$ est la même chose que $\sqrt[3]{8a^3m}$.

107. Problème III. *Former les puissances d'un polynome quelconque.*

Soit d'abord le binome $a + b$, dont il s'agisse de former les puissances. Multipliez $a + b$ par $a + b$; vous trouverez $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Multipliez ce produit par $a + b$; vous trouverez $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Multipliez ce produit par $a + b$, vous trouverez $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, etc.

De ces calculs résultent les théorêmes suivans :

I. *Le quarré d'un binome contient*; 1.° *le quarré de la première partie de ce binome ;* 2.° *le double produit de la première partie multipliée par la seconde* ; 3.° *le quarré de la seconde.*

II. *Le cube d'un binome contient*; 1.° *le cube de la première partie de ce binome ;* 2.° *trois fois le quarré de la première partie, multiplié par la seconde* ; 3.° *trois fois le quarré de la seconde, multiplié par la première*; 4.° *le cube de la seconde.*

III. *La quatrième puissance d'un binome contient*; 1.° *la quatrième puissance de la première partie de ce binome*; 2.° *quatre fois le cube de la première partie, multiplié par la seconde* ; 3.° *six fois le quarré de la première, multiplié par le quarré de la seconde* ; 4.° *quatre fois le cube de la seconde, multiplié par la première*; 5.° *la quatrième puissance de la seconde.*

La suite de ces théorêmes n'a pas de fin : je ne les pousse pas plus loin, me réservant de donner plus bas (chap. IX) une méthode générale et abrégée pour former tout d'un coup et immédiatement chaque puissance, sans passer par les puissances antérieures.

Les puissances des *trinomes*, des *quadrinomes*, etc., se forment par les mêmes moyens. Soit, par exemple, le trinome $a+b+c$. Je prends une quantité simple d, pour représenter la somme $+b+c$ des deux derniers termes de ce trinome, c'est-à-dire, que je fais $+b+c=d$; alors la question est de former les puissances du binome $a+d$. Quand ces puissances auront été trouvées comme on vient de l'expliquer, on substituera à la place des puissances de d, les puissances pareilles du binome $+b+c$.

De même, s'il s'agissoit de former les puissances du quadrinome $a+b+c+d$, on supposeroit $+b+c+d=e$; et, après avoir formé les puissances du binome $a+e$, on substitueroit, à la place des puissances de e, les puissances semblables du trinome $+b+c+d$, qui se trouvent comme on vient de voir.

On réduira toujours ainsi la formation des puissances d'un polynome qui a un nombre quelconque de termes à la formation des puissances d'un polynome qui a un terme de moins. Et, en allant de proche en proche, le problême ne consistera jamais qu'à élever un binome à une puissance proposée.

Les puissances des fractions qui ont des termes complexes se forment en élevant numérateur et dénominateur, au quarré, au cube, à la quatrième puissance, etc. Ainsi, par exemple, le quarré de la fraction $\frac{a+b}{2m+3n}$ est $\frac{a^2+2ab+b^2}{4m^2+12mn+9n^2}$.

108. *Remarque.* Si on demandoit les puissances du binome $-a-b$, dont les deux termes sont négatifs, tous les termes des puissances *paires* auroient le signe $+$, parce que $-\times-$ donne $+$; et tous les termes des puissances *impaires* auroient le signe $-$, parce que $+\times-$ donne $-$. Ainsi le quarré de $-a-b$ est $aa+2ab+bb$, et le cube de $-a-b$ est $-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$.

Si on demandoit les puissances du binome $a-b$, dont les deux termes ont des signes différents; alors, pour toutes les puissances paires ou impaires, tous les termes où b auroit des exposants pairs seroient positifs, et ceux où b auroit des exposants impairs seroient négatifs. Ainsi le quarré de $a-b$ est $aa-2ab+bb$; le cube de $a-b$ est $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

On étendra facilement l'usage de cette remarque aux trinomes, aux quadrinomes, etc.

109. Problême IV. *Extraire la racine quarrée d'un polynome entier ou fractionnaire.*

Il est clair que la question se réduit dans tous les cas à savoir tirer la racine quarrée d'un polynome entier, parce que la racine quarrée d'une fraction est la racine quarrée du numérateur divisée par la racine quarrée du dénominateur. Or, pour tirer la racine quarrée d'un polynome entier, il faut décomposer le quarré suivant l'ordre inverse

de celui de sa formation ; on procédera généralement comme dans les exemples suivants.

110. Exemple I. *Extraire la racine quarrée du polynome* $4a^2 - 4ab + b^2$.

J'ordonne ce polynome par rapport à la lettre a, et je le dispose comme on voit ici.

	Quarré supposé.	racine.
	$4a^2 - 4ab + b^2$,	$2a - b$
	$-4a^2$	$4a$
1.er reste	$-4ab + b^2$,	
	$+4ab - b^2$	
2.e reste	0	

Cela posé, 1.° la racine du premier terme $4a^2$ est $\pm 2a$. Je me contente, pour simplifier l'opération, d'écrire cette racine avec le signe supérieur sous-entendu. Je quarre $2a$, et j'écris le quarré, avec un signe contraire, sous le premier terme de la quantité proposée, pour pouvoir faire la réduction. Cette réduction faite, il reste $-4ab + b^2$.

2.° Je double la racine $2a$, ce qui me donne $4a$, quantité par laquelle je divise le premier terme $-4ab$ du reste précédent; il vient au quotient $-b$ que j'écris à la suite du premier terme $2a$ de la racine. Je fais le produit de $4a$ par $-b$, et le quarré de $-b$; j'écris la somme de ces deux produits, avec des signes contraires, sous le premier reste $-4ab + b^2$. La réduction faite, il ne reste rien. D'où je conclus que $2a - b$ est la racine exacte du polynome proposé.

On voit qu'au lieu de $2a - b$ on pourroit prendre également pour racine $-2a + b$, qui a des signes contraires à ceux de la première.

111. **Exemple II.** *Extraire la racine du polynome* $9a^2 - 12ab - 6ac + 4bc + 4b^2 + c^2$, *qui est ordonné par rapport à la lettre* a.

Je dispose les quantités, et j'opère sur elles comme il est exprimé ici :

Quarré supposé.	racine.
$9a^2 - 12ab + 4b^2 + 4bc + c^2$, $-6ac$	$3a - 2b - c$
$-9a^2$	$6a$
	$6a - 4b$.
1.er reste $-12ab + 4b^2 + 4bc + c^2$, $-6ac$	
$+12ab - 4b^2$	
2.e reste $-6ac + 4bc + c^2$,	
$+6ac - 4bc - c^2$	
3.e reste 0	

1.° Je tire la racine du premier terme $9a^2$; elle est $\pm 3a$, mais je ne prends que le signe supérieur. J'écris le quarré de cette racine, avec un signe contraire, sous le polynome proposé. La réduction faite, on a pour premier reste, $-12ab - 6ac + 4b^2 + 4bc + c^2$.

2.° Je double la racine trouvée $3a$; et, par ce double $6a$, je divise le premier terme $-12ab$ du reste précédent; le quotient est $-2b$, que j'écris à la suite de $3a$. Je fais le produit de $6a$ par $-2b$, et le quarré de $-2b$; j'écris la somme de ces deux produits avec des signes contraires, sous le premier reste. La réduction faite, on a le second reste $-6ac + 4bc + c^2$.

3.° Je double la racine $3a - 2b$, ce qui donne $6a - 4b$. Par le premier terme $6a$ de cette quantité, je divise le premier terme $-6ac$ du second reste; il vient au quotient $-c$, que j'écris à la suite de $3a - 2b$. Je multiplie le diviseur $6a - 4b$ par $-c$, et je fais le quarré de $-c$; j'écris la somme de ces deux produits, avec des signes contraires, sous le second reste. Je fais la réduction; il ne reste rien. Donc $3a - 2b - c$, ou $-(3a - 2b - c)$, est la racine exacte du polynome proposé.

112. *Scholie.* Lorsqu'une quantité radicale complexe a des facteurs qui sont des quarrés parfaits, l'expression peut être simplifiée ou changée. Qu'on ait, par exemple, la quantité radicale $\sqrt{(3a^3c - 6a^2bc + 3ab^2c)}$; j'observe que le polynome $3a^3c - 6a^2bc + 3ab^2c$ est composé de ces deux facteurs $aa - 2ab + bb$, et $3ac$, dont le premier est le quarré de $a - b$; d'où il suit qu'en tirant la racine de ce quarré, la quantité radicale proposée deviendra celle-ci, $(a - b)\sqrt{3ac}$.

Réciproquement une quantité rationnelle complexe, écrite au-devant d'un signe radical du second degré, peut être transportée sous ce signe, en élevant cette quantité au quarré. Ainsi $(a + b)\sqrt{m}$ est la même chose que $\sqrt{[a^2m + 2abm + b^2m]}$.

113. Problème V. *Extraire la racine cube d'un polynome quelconque, entier ou fractionnaire.*

La question est seulement de savoir extraire la racine cube d'un polynome entier, puisqu'on aura celle d'une fraction en divisant la racine cube du numérateur par la racine cube du dénominateur. Or, on tirera dans tous les cas la racine cube d'un polynome entier, comme dans les exemples suivants.

114. Exemple I. *Extraire la racine cube du polynome* $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$.

Je commence par ordonner cette quantité relativement à la lettre a; ensuite je fais l'opération desirée, comme il est indiqué dans le tableau suivant, et comme je l'explique dans le discours qui accompagne ce tableau.

	Cube supposé.	racine cube.
	$27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$,	$3a - 2b$
	$-27a^3$	$27a^2$
1.er reste	$-54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$,	
	$+54a^2b - 36ab^2 + 8b^3$	
2.e reste	0	

1.° J'extrais la racine cube du premier terme $27a^3$; elle est $3a$ que j'écris. Ensuite, après avoir formé le cube

cette partie, et après l'avoir placé, avec un signe contraire, sous le polynome proposé, je fais la réduction ; ce qui me donne pour premier reste $-54a^2b+36ab^2-8b^3$.

2.° Je fais le quarré de la partie $3a$, et je le triple ; ce qui me donne $27a^2$, quantité par laquelle je divise le premier terme $-54a^2b$ du premier reste ; il vient au quotient $-2b$, que j'écris à la racine. Ensuite, je fais premièrement le produit de $27a^2$ par $-2b$; il est $-54a^2b$: secondement, le produit du triple du quarré de $-2b$ par $3a$; il est $+36ab^2$: troisièmement, le cube de $-2b$; il est $-8b^3$. Puis ayant écrit la somme de ces trois produits, avec des signes contraires, sous le premier reste, je fais la réduction ; il ne reste rien. D'où je conclus que la racine cube exacte de la quantité proposée est $3a-2b$.

On ne peut pas mettre ici le double signe $\pm$ au-devant de la racine, comme pour la racine quarrée.

115. Exemple II. *Extraire la racine cube du polynome* $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3+27a^2c-36abc+12b^2c+9ac^2-6bc^2+c^3$.

Ayant ordonné ce polynome par rapport à a, l'opération se fait comme on le voit dans le tableau suivant :

Cube supposé.	racine cube.
$\left\{\begin{array}{l} 27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3 \\ \quad +27a^2c-36abc+12b^2c \\ \quad\quad +9ac^2-6bc^2+c^3, \end{array}\right.$	$3a-2b+c$
$-27a^3$	$27a^2$
1.er reste $\left\{\begin{array}{l} -54a^2b+36ab^2-8b^3 \\ +27a^2c-36abc+12b^2c \\ \quad +9ac^2-6bc^2+c^3, \end{array}\right.$	$27a^2-36ab+12b^2$
$+54a^2b-36ab^2+8b^3$	
2.e reste $\left\{\begin{array}{l} +27a^2c-36abc+12b^2c \\ \quad +9ac^2-6bc^2+c^3, \end{array}\right.$	
$-27a^2c+36abc-12b^2c$	
$\quad -9ac^2+6bc^2-c^3$	
3.e reste 0	

Les deux premiers termes de la racine se trouvent par un calcul qui est exactement le même que celui de l'exemple précédent. Mais pour épargner tout embarras aux commençants, je vais faire ici l'opération en son entier.

1.° J'extrais la racine cube du premier terme $27a^3$; elle est $3a$, que j'écris. J'en fais le cube, et j'écris ce cube, avec un signe contraire, sous le polynome; et la réduction étant faite, j'ai le premier reste écrit ci-dessus.

2.° Je fais le quarré de $3a$, et je le triple; ce qui me donne $27a^2$, quantité par laquelle je divise le premier terme $-54a^2b$ du premier reste; le quotient est $-2b$ que j'écris à la suite de $3a$. Je fais trois produits : savoir, premièrement, celui de $27a^2$ par $-2b$: secondement, celui du triple du quarré de $-2b$ par $3a$: troisièmement, le cube de $-2b$. Ces trois quantités étant ajoutées ensemble, j'écris la somme, avec des signes contraires, sous le premier reste; et je fais la réduction. De toutes ces opérations résulte le second reste qu'on voit ci-dessus.

3.° Je considère la partie $3a-2b$ comme ne formant qu'un même tout; j'en fais le quarré, et je le triple; ce qui me donne $27a^2-36ab+12b^2$. Par le premier terme $27a^2$ de cette quantité, je divise le premier terme $27a^2c$ du second reste; le quotient est $+c$, que j'écris à la suite de la première partie $(3a-2b)$ de la racine. Ensuite je fais trois produits; savoir, premièrement, celui de $27a^2-36ab-12b^2$, par c; secondement, celui du triple du quarré de c, par $3a-2b$; troisièmement, le cube de c. Et après avoir écrit la somme de ces trois quantités, avec des signes contraires, sous le second reste, je fais la réduction, et j'ai o pour reste. Par conséquent la racine exacte du polynome proposé est $3a-2b+c$.

116. *Scholie général.* En décomposant toujours les puissances dans un ordre opposé à celui suivant lequel nous avons vu (107) qu'elles se forment, on pourroit établir des règles particulières pour extraire la racine quatrième, cinquième, sixième, etc., d'une quantité complexe; mais je ne pousserai pas plus loin ces détails qui n'ont d'autre difficulté que la longueur des calculs.

Il arrive souvent qu'une quantité complexe dont on propose d'extraire une racine n'est pas une puissance parfaite de cette racine; alors l'extraction de la racine ne peut se faire que par approximation, au moyen des suites infinies. Ces suites, qu'on pourroit former par les principes précédents, se trouvent beaucoup plus facilement par la *formule du binome*, que j'expliquerai ci-dessous (chap. IX).

CHAPITRE VIII.

Des équations en général, et de celles du premier degré en particulier.

117. Si deux quantités, simples ou composées, sont égales entre elles, l'expression symbolique d'une telle égalité est ce qu'on appelle une *équation*. Par exemple, l'expression $9+3=7+5$ est une équation. De même, $a+b=c+d$, $x^2+bx=cd$, sont des équations. Les deux parties de l'équation séparées par le signe $=$ en sont appelées les *membres*. Chaque membre peut être composé d'un ou de plusieurs termes.

118. Les équations servent à exprimer d'une manière abrégée les raisonnements qu'on est obligé de faire pour résoudre une question; elles en sont, pour ainsi dire, la traduction algébrique. Or, parmi les quantités que l'on compare ainsi ensemble, les unes sont *connues*, les autres *inconnues*. Ordinairement on représente les premières par les premières lettres a, b, c, d, etc. de l'alphabet, et les secondes, par les dernières lettres t, x, y, z; mais cela est arbitraire. On fait d'ailleurs exactement les mêmes opérations de calcul sur les unes et sur les autres. L'objet final d'une équation qui contient une inconnue est toujours de faire connoître cette quantité, ou, comme on dit, de *dégager l'inconnue*. Cet art s'appelle encore *la résolution des équations*.

119. On distingue deux sortes de problémes; les problémes *déterminés*, et les problémes *indéterminés*. Les premiers sont ceux dont les conditions exprimées en langage algébrique mène à une équation finale qui ne contient qu'une seule inconnue; et cette équation s'appelle en conséquence *équation déterminée*. Les problémes indéterminés mènent à une équation qui contient plusieurs inconnues, et qui s'appelle *équation indéterminée*.

120. Les équations déterminées ou indéterminées sont de différents degrés, c'est-à-dire, du premier degré, ou du second, ou du troisième, ou du quatrième, etc. selon que la plus haute puissance de l'inconnue, ou de l'une des inconnues dans un terme, ou que le produit de plusieurs inconnues mêlées ensemble dans un terme, est d'une dimension, ou de deux dimensions, ou de trois, ou de quatre, etc. Ainsi, x étant l'inconnue, l'équation $ax + bc = cd$ est du premier degré, parce que l'inconnue n'y est que d'une dimension. L'équation $ax^2 + bcx = m^3 + n^3$ est du second degré, parce que, dans le terme ax^2, l'inconnue forme deux dimensions, x^2 étant la même chose que xx. L'équation $x^3 + bx^2 + c^2x = m^3$ est du troisième degré, parce que le terme x^3 est de trois dimensions formées de la seule inconnue x; ainsi de suite. Toutes ces équations sont déterminées. Prenons pour exemple d'une équation indéterminée celle-ci, $ax + xy + by = cd$, dans laquelle x et y sont les inconnues: cette équation est du second degré, parce que le terme xy, qui contient le produit des deux inconnues, est de deux dimensions. Les équations indéterminées $ax^3 + b^2xy + b^3y = m^4$, $ax^2 + xy^2 + by^2 = h^3$, sont du troisième degré, parce que, dans le terme ax^3 de la première, l'inconnue étant élevée à la troisième puissance, forme trois dimensions, et que dans la seconde les inconnues x et y forment aussi trois dimensions dans le terme xy^2; ainsi de suite.

Les quantités connues et données n'entrent jamais pour rien dans l'estimation du degré d'une équation.

il se règle seulement d'après les inconnues, comme nous venons de l'expliquer.

121. Problème I. *Résoudre une équation déterminée quelconque du premier degré.*

Tout l'art de résoudre les équations déterminées du premier degré est de faire en sorte que l'inconnue soit seule dans un membre, tandis que les autres quantités, supposées connues, sont dans l'autre membre ; car alors l'inconnue est évidemment dégagée, puisqu'elle se trouve égale à un résultat de quantités toutes connues. Or, on parviendra toujours à ce but, soit en ajoutant à chaque membre, ou en retranchant de chaque membre, une même quantité, soit en multipliant ou en divisant chaque membre par une même quantité, soit en les élevant l'un et l'autre à la même puissance, soit en tirant de part et d'autre une même racine. Il est clair que toutes ces opérations auxiliaires produisent des deux côtés du signe $=$ des quantités encore égales entre elles, puisqu'on fait subir par là les mêmes changements aux deux membres de l'équation primitivement donnée.

Par exemple, soit l'équation $x \pm a = b + c$, dans laquelle tout est connu excepté x. J'écris de part et d'autre $\mp a$, afin que cette quantité détruise $\pm a$ dans le premier membre ; alors j'ai $x = b + c \mp a$, et l'inconnue x est dégagée.

On voit par cet exemple que si on retranche de chaque membre de l'équation, ou qu'on ajoute à chaque membre, une même grandeur qui se trouve dans l'un d'eux, cette grandeur disparoît du membre où elle est, pour se reproduire dans l'autre membre avec un signe contraire : c'est ce qui est arrivé à $\pm a$, lorsque de l'équation $x \pm a = b + c$ on a tiré $x = b + c \mp a$. On appelle cela *transposer un terme* ; opération d'un fréquent usage.

Soit l'équation $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$. La première chose que je dois faire pour parvenir à dégager l'inconnue x, est de la débarrasser du diviseur a qui l'affecte. Or, pour cela, je multiplie tous les termes de l'équation par a, ce qui ne

détruit pas l'égalité du premier membre avec le second, et ce qui me donne $x+\frac{ab}{c}=\frac{ad}{e}$. Ensuite je transpose le terme $\frac{ab}{c}$, et j'ai $x=\frac{ad}{e}-\frac{ab}{c}$.

Il en seroit de même si le diviseur de x étoit complexe, comme, par exemple, si on avoit l'équation $\frac{x}{a+b-c}+\frac{h}{g}=\frac{f}{m}$. D'abord, en indiquant simplement la multiplication de tous les termes de l'équation par le diviseur $a+b-c$, on auroit $x+\frac{h(a+b-c)}{g}=\frac{f(a+b-c)}{m}$. Ensuite, en transposant le terme $\frac{h(a+b-c)}{g}$, il viendroit $x=\frac{f(a+b-c)}{m}-\frac{h(a+b-c)}{g}$, ou bien (en effectuant les multiplications indiquées), $x=\frac{af+bf-cf}{m}-\frac{ah+bh-ch}{g}$, ou bien encore (en réduisant les deux fractions au même dénominateur), $x=\frac{afg+bfg-cfg}{gm}-\left(\frac{ahm+bhm-chm}{gm}\right)$, ou enfin

$$x=\frac{afg+bfg-cfg-ahm-bhm+chm}{gm}.$$

Soit l'équation $\frac{ax}{b}+\frac{bc}{d}=\frac{ex}{f}+\frac{bg}{m}$. Je fais disparoître les fractions, en multipliant successivement chaque terme par chaque dénominateur b, d, f, m. Par là, j'ai premièrement, $ax+\frac{b^2c}{d}=\frac{bex}{f}+\frac{b^2g}{m}$; secondement, $adx+b^2c=\frac{bdex}{f}+\frac{b^2dg}{m}$; troisièmement, $adfx+b^2cf=bdex+\frac{b^2dfg}{m}$; quatrièmement, $adfmx+b^2cfm=bdemx+b^2dfg$. Etant parvenu à ce dernier résultat, je mets dans le pr

mier membre tous les termes qui contiennent x, et tous les autres dans le second. Cela se fait en transposant les deux termes b^2cfm et $bdemx$. J'ai donc ainsi, $adfmx - bdemx = b^2dfg - b^2cfm$, ou bien $x(adfm - bdem) = b^2dfg - b^2cfm$. Maintenant, en divisant tout par la quantité $adfm - bdem$, qui multiplie x, j'aurai l'inconnue x toute seule dans le premier membre, en cette sorte : $x = \frac{b^2dfg - b^2cfm}{adfm - bdem}$.

Si on avoit une équation de cette espèce, $\sqrt{x} + \sqrt{c} = \sqrt{[m+n]}$; en transposant d'abord $\sqrt{c}$, on auroit $\sqrt{x} = \sqrt{[m+n]} - \sqrt{c}$. Ensuite, élevant tout au quarré, on auroit $x = (\sqrt{[m+n]} - \sqrt{c})^2$.

Tels sont les principes généraux d'après lesquels on résoudra facilement dans tous les cas une équation quelconque du premier degré. Je vais maintenant appliquer ces principes à la solution de différents problèmes particuliers, qui contiendront un plus ample développement des règles précédentes.

122. Problème II. *Trouver un nombre qui, étant ajouté à sa moitié et à son tiers, donne* 110 *pour somme.*

Traduisons cette question en langage algébrique. Soit x le nombre cherché ; sa moitié sera $\frac{x}{2}$, et son tiers, $\frac{x}{3}$. Ajoutant ces trois quantités ensemble, on aura pour somme, $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$. Or, par hypothèse, cette somme doit être égale à 110. On aura donc l'équation, $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 110$.

Pour parvenir à dégager l'inconnue x, je fais disparoître les fractions, en multipliant successivement tous les termes par les dénominateurs 2 et 3. Je trouve ainsi d'abord, $2x + x + \frac{2x}{3} = 220$, puis $6x + 3x + 2x = 660$, ou bien, $11x = 660$. Divisant tout par 11, j'aurai $x = 60$. En effet, en ajoutant à 60 sa moitié 30 et son tiers 20, on aura 110 pour somme.

123. Problème III. *Quel âge avons-nous l'un et l'autre? demande un fils à son père. Le père répond : Votre âge est actuellement le tiers du mien, et il y a six ans qu'il en étoit le quart : trouvez l'âge de chacun.*

Soit, en prenant l'année pour unité, x l'âge actuel du père ; l'âge actuel du fils sera $\frac{x}{3}$. Il y a six ans que l'âge du père étoit $x - 6$, et que par conséquent l'âge du fils étoit $\frac{x}{3} - 6$. Or, (hyp.) l'âge du père étoit alors quadruple de celui du fils. Ainsi, on a l'équation, $x - 6 = 4\left(\frac{x}{3} - 6\right)$, ou bien, $x - 6 = \frac{4x}{3} - 24$. Multipliant tout par 3, pour faire disparoître la fraction, on aura $3x - 18 = 4x - 72$, ou bien, (en transposant les deux termes $3x$ et -72), $72 - 18 = 4x - 3x$, c'est-à-dire, $54 = x$. Ainsi, le père a actuellement 54 ans, et le fils 18 ans.

124. Problème IV. *Un ouvrier s'est engagé pour* 60 *jours, à condition qu'on lui donneroit* 15 *sous chaque jour qu'il travailleroit, et qu'il donneroit* 5 *sous chaque jour qu'il ne travailleroit point : au bout de* 60 *jours, il reçoit* 24ᵗᵗ *; combien de jours a-t-il travaillé ?*

Soit x le nombre cherché de jours; et par conséquent $60 - x$, le nombre de jours que l'ouvrier n'a pas travaillé. En exprimant en livres le gain et la perte, il est clair que comme 15 sous sont les trois quarts d'une livre, et 5 sous le quart; le gain que fait l'ouvrier pendant le nombre de jours x est $\frac{3}{4}x$, et que la perte qu'il fait pendant le nombre de jours $(60 - x)$ est $\frac{1}{4}(60 - x)$. Or, (hyp.), le gain moins la perte est 24ᵗᵗ. Ainsi on a l'équation, $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}(60 - x) = 24$, ou bien $\frac{3}{4}x - 15 + \frac{1}{4}x = 24$, ou bien $x - 15 = 24$. Donc, en transposant -15, on aura $x = 39$. L'ouvrier a donc travaillé 39 jours, et il a été 21 jours sans rien faire.

125. Problème V. *Deux courriers partent d'un même lieu* 10 *heures l'un après l'autre; le premier fait* 9 *lieues*

heures, et le second 7 lieues en 2 heures : on demande au bout de quel temps le second joindra le premier.

Soit, en prenant l'heure pour unité, t le nombre d'heures que le second courrier a marché depuis le moment de son départ jusqu'à celui où il atteint le premier. Il est évident que le nombre d'heures que le premier courrier a marché depuis le moment de son départ jusqu'à celui où il est atteint par le second, sera $t + 10$. D'un autre côté, puisque le premier courrier fait 9 lieues en 4 heures, et que le second fait 7 lieues en 2 heures, si l'on fait ces deux proportions,

1.re $4 : t + 10 :: 9$ lieues : un quatrième terme,
2.e $2 : t :: 7$ lieues : un quatrième terme,

les deux quatrièmes termes $\frac{9(t+10)}{4}$, $\frac{7t}{2}$, exprimeront évidemment les nombres de lieues parcourues par les deux courriers. Or, comme les deux courriers partent d'un même lieu et vont dans le même sens, ils parcourent des espaces égaux depuis le point de départ jusqu'au point de rencontre. D'où il suit qu'on aura l'équation, $\frac{7t}{2} = \frac{9(t+10)}{4}$, ou bien $14t = 9t + 90$; c'est-à-dire, $t = \frac{90}{5} = 18$. Ainsi le second courrier 18 heures après son départ joindra le premier.

Si on veut connoître le nombre de lieues que chacun des courriers a faites lorsqu'ils se rencontrent, on le trouvera en considérant que, puisque le second courier fait 7 lieues en 2 heures, il aura fait en 18 heures, $\frac{7}{2} \times 18$ lieues, c'est-à-dire, 63 lieues. Ainsi le point de rencontre est distant du point de départ de 63 lieues.

126. Problême VI. *Supposons maintenant, pour proposer la même question plus généralement, que les deux courriers ne partent pas du même lieu, mais que le premier parte d'un lieu plus avancé vers le but où ils tendent l'un et l'autre, d'un nombre de lieues exprimé par* a; *qu'il parte avant le second un nombre d'heures exprimé par* h; *que le premier*

fasse le nombre m *de lieues pendant le nombre* n *d'heures, et le second, le nombre* p *de lieues pendant le nombre* q *d'heures : on demande au bout de quel temps le second joindra le premier.*

Soit t le nombre d'heures que le second courrier a marché depuis le moment de son départ jusqu'à celui où il atteint le premier. Puisque le premier courrier part avant le second, un nombre d'heures exprimé par h, il est clair que $t + h$ exprimera le temps que marche le premier courrier avant que d'être atteint par le second. De plus, en faisant ces deux proportions,

1.re $n : m :: t+h$: un quatrième terme,
2.e $q : p :: t$: un quatrième terme;

les deux quatrièmes termes $\frac{m(t+h)}{n}$, $\frac{pt}{q}$, exprimeront les espaces parcourus par le premier et le second courrier, depuis les points de leurs départs jusqu'au point où ils se rencontrent. Or, comme le premier courrier a le chemin a d'avance sur le second, il est clair que l'espace $\frac{pt}{q}$ parcouru par le second courrier doit être égal à la somme faite de la distance a et de l'espace $\frac{m(t+h)}{n}$: on aura donc l'équation $\frac{pt}{q} = a + \frac{m(t+h)}{n}$, ou bien $\frac{pt}{q} = a + \frac{mt+mh}{n}$.

Faisons disparoître les fractions ; nous aurons d'abord, $pt = qa + \frac{qmt + qmh}{n}$; puis $npt = qan + qmt + qmh$. Mettons dans un même membre tous les termes où l'inconnue t se trouve, et tous les autres dans l'autre membre ; nous aurons $npt - qmt = qan + qmh$, ou bien $t(np-qm) = qan + qmh$. Divisant tout par $np - qm$, on aura $t = \frac{qan + qmh}{np - qm}$.

Cette équation est une formule générale dans laquelle il ne s'agira plus que de substituer à la place des quantités a, h, m, n, p, q, leurs valeurs numériques, pour a

les solutions de toutes les questions particulières qu'on peut proposer sur ce sujet. Par exemple, pour tirer de cette formule la solution de la question précédente, il faudra supposer que la quantité a devient nulle ou zéro (ce qui s'exprime ainsi, $a = 0$); $h = 10$ heures; $m = 9$ lieues; $n = 4$ heures; $p = 7$ lieues; $q = 2$ heures. Alors on aura $qan = 0$; $qmh = 2 \times 9 \times 10 = 180$; $np = 4 \times 7 = 28$; $qm = 2 \times 9 = 18$. Par conséquent $t = \frac{180}{28 - 18} = 18$, comme ci-dessus.

Si on veut avoir les expressions générales des espaces que les deux courriers parcourent depuis leurs points de départs jusqu'au point de rencontre, on observera que l'espace parcouru par le premier courrier étant $\frac{m(t + h)}{n}$, et l'espace parcouru par le second étant $\frac{pt}{q}$; si l'on met dans ces expressions, pour t sa valeur $\frac{qan + qhm}{np - qm}$, on trouvera que le premier espace $= \frac{qam + phm}{np - qm}$, et que le second $= \frac{pan + phm}{np - qm}$.

Dans l'hypothèse du problème précédent, on a $a = 0$, $h = 10$ heures, $m = 9$ lieues, $n = 4$ heures, $p = 7$ lieues, $q = 2$ heures. Substituant ces valeurs dans les expressions générales que nous venons de trouver pour les espaces, ces expressions se réduiront l'une et l'autre à 63; en sorte que les deux courriers auront fait chacun 63 lieues lorsqu'ils se rencontreront.

127. *Remarque.* Nous avons résolu les questions précédentes, sans employer, pour en exprimer les conditions, plus d'une inconnue. Mais souvent on a besoin, ou du moins il est plus commode d'employer plusieurs inconnues. Alors on forme, s'il est possible, autant d'équations qu'il y a d'inconnues; ces équations combinées ensemble servent à chasser ou à *éliminer* successivement toutes les inconnues moins une; et on parvient à une équation

finale qui ne contient plus qu'une inconnue, et qui se résout comme nous l'avons expliqué. Des exemples vont faire entendre cela clairement.

128. Problême VII. *Trouver deux nombres dont la somme soit* a, *et la différence* d.

Soient x le plus grand des deux nombres cherchés, y le plus petit. On aura, suivant les conditions du problême, les deux équations, $x+y=a$, $x-y=d$.

Tirons de chacune d'elles la valeur de l'une des inconnues; de y par exemple. La première donnera $y=a-x$; la seconde, $y=x-d$. Or, $y=y$. Par conséquent on aura aussi, $a-x=x-d$, équation qui ne contient plus que la seule inconnue x, et de laquelle on tire, $x=\frac{a+d}{2}$.

Mettons cette valeur de x dans l'une des équations primordiales, par exemple dans l'équation $y=a-x$; nous aurons $y=a-\left(\frac{a+d}{2}\right)=\frac{a-d}{2}$.

Il est évident qu'on auroit trouvé pour y la même valeur en mettant pour x sa valeur dans l'autre équation primordial $y=x-d$, puisque les deux quantités $a-x$ et $x-d$ sont égales entre elles.

Ces valeurs de x et de y font voir qu'*en général le plus grand des deux nombres est égal à la moitié de leur somme, plus la moitié de leur différence*; *et que le plus petit est égal à la moitié de leur somme, moins la moitié de leur différence.*

Supposons, par exemple, que la somme a soit 60, et que la différence d soit 12; on aura $x=36$, $y=24$.

129. *Remarque.* La méthode que nous venons d'employer pour dégager les deux inconnues x et y est générale; mais on peut souvent parvenir au même but d'une manière plus abrégée, soit en ajoutant ensemble les équations, soit en retranchant l'une de l'autre. Ainsi, par exemple, ayant les deux équations $x+y=a$, $x-y=d$; si on les ajoute ensemble, on aura tout d'un coup, $2x=$

$a + d$, ou $x = \frac{a+d}{2}$; et si l'on retranche la seconde de la première, on aura $2y = a - d$, ou $y = \frac{a-d}{2}$.

130. Problême VIII. *Faire, avec deux matières dont on connoît les poids sous un même volume* (1) *donné, un corps dont le poids et le volume soient donnés.*

Nommons m le volume du corps mixte, p son poids, q et r respectivement ce que pèsent les deux matières composantes, sous le même volume n; x et y les volumes de ces matières, qui forment le volume m. On aura d'abord l'équation, $x + y = m$. De plus, puisque q est le poids du volume n de la première matière, et r le poids du volume égal n de la seconde; il est clair, 1.° que le poids du volume x sera le quatrième terme d'une proportion dont n, q, x, sont les trois premiers, et que par conséquent ce poids sera exprimé par $\frac{qx}{n}$; 2.° que pareillement le poids du volume y sera exprimé par $\frac{ry}{n}$. Or, (hyp.) la somme des deux poids $\frac{qx}{n}$, $\frac{ry}{n}$, doit être égale à p. Ainsi on aura cette seconde équation, $\frac{qx}{n} + \frac{ry}{n} = p$.

Tirons de chacune de ces deux équations la valeur d'une même inconnue, par exemple, de y. La première donne $y = m - x$; la seconde $y = \frac{np - qx}{r}$. Or, $y = y$. Donc on aura l'équation $m - x = \frac{pn - qx}{r}$, qui ne contient plus que la seule inconnue x. Multipliant tout par r, on aura $mr - rx = pn - qx$; transposant, il vient $mr - pn = rx - qx$, ou $mr - pn = x(r - q)$. Donc, (en divisant tout par $r - q$), $x = \frac{mr - pn}{r - q}$. Mettons cette valeur

(1) On appelle *volume* d'un corps l'espace que ce corps occupe, c'est-à dire, le nombre de pieds cubes, ou de pouces cubes, etc., qui composent sa grandeur apparente.

de x dans l'une des équations primordiales, par exemple, dans l'équation $y = m - x$, nous aurons $y = m - \left(\frac{mr - pn}{r - q}\right) = \frac{pn - mq}{r - q}$.

Pour faire une application de ces valeurs générales de x et de y, supposons que le corps mixte soit composé d'or et d'argent; que son volume soit de 3 pouces cubes, son poids de 30 onces; le poids du pouce cube d'or, de $12\frac{2}{3}$ onces; celui du pouce cube d'argent, de $6\frac{8}{9}$ onces. On aura donc $m = 3$ pouces cubes; $p = 30$ onces; $n = 1$ pouce cube; $q = 12\frac{2}{3}$ onces $= \frac{38}{3}$ onces; $r = 6\frac{8}{9}$ onces $= \frac{62}{9}$ onces. Substituant ces valeurs dans les équations générales, $x = \frac{mr - pn}{r - q}$, $y = \frac{pn - mq}{r - q}$; elles deviendront $x = \frac{21}{13}$, $y = \frac{18}{13}$. Par conséquent le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes d'or, et $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

131. *Remarque*. Nous aurions pu dégager nos deux inconnues x et y, par le moyen indiqué (129), mais cela auroit demandé une préparation qu'il est bon d'expliquer ici : on imitera le même procédé dans les autres cas.

Ayant d'abord trouvé les deux équations fondamentales, $x + y = m$, et $\frac{qx + ry}{n} = p$, ou bien $qx + ry = np$; si l'on veut commencer par éliminer y, on multipliera tous les termes de la première par r, afin d'avoir dans les deux équations un terme commun ry. Par ce moyen, elle deviendra $rx + ry = rm$, dont retranchant, membre à membre, la seconde équation $qx + ry = np$, il vient $rx - qx = mr - np$, ou $x(r - q) = rm - np$, ou enfin $x = \frac{rm - np}{r - q}$.

Si on veut éliminer x par le même moyen, on multipliera par q tous les termes de l'équation $x + y = m$, et on aura $qx + qy = qm$, dont retranchant l'équation $qx + ry = np$, il vient $qy - ry = qm - np$, ou $y(r - q) = np - qm$, ou $y = \frac{np - qm}{r - q}$.

132. Problème IX. *Trois joueurs ont fait des gains tels que la somme du premier gain et de la moitié des deux autres est* a; *la somme du second et du tiers des deux autres est* b; *la somme du troisième et du quart des deux autres est* c: *on demande quel est le gain de chaque joueur.*

Soient x, y, z, les trois gains cherchés. On aura, suivant les conditions du problême, $x+\frac{y+z}{2}=a$, $y+\frac{x+z}{3}=b$, $z+\frac{x+y}{4}=c$. Je tire de chacune de ces trois équations une valeur de z, et j'ai, $z=2a-2x-y$, $z=3b-3y-x$, $z=\frac{4c-x-y}{4}$. Egalant la première valeur de z à la seconde et à la troisième, je forme les deux équations, $2a-2x-y=3b-3y-x$, $2a-2x-y=\frac{4c-x-y}{4}$, qui ne contiennent plus que deux inconnues x et y. Tirons de chacune d'elles la valeur de y. La première donne, $y=\frac{3b-2a+x}{2}$; la seconde, $y=\frac{8a-7x-4c}{3}$. Ainsi on aura l'équation $\frac{3b-2a+x}{2}=\frac{8a-7x-4c}{3}$, qui ne contient que la seule inconnue x, et de laquelle on tire, $x=\frac{22a-8c-9b}{17}$.

Mettons cette valeur de x dans l'équation $y=\frac{3b-2a+x}{2}$; nous trouverons $y=\frac{21b-6a-4c}{17}$.

Enfin, mettons les valeurs de x et de y dans l'équation $z=2a-2x-y$; nous trouverons $z=\frac{20c-3b-4a}{17}$.

Les trois gains x, y, z, sont donc exprimés en quantités toutes connues, et sont par conséquent connus.

Supposons, pour faire une première application de ces formules, $a=4$, $b=3$, $c=2$. On trouvera $x=\frac{45}{17}$, $y=\frac{31}{17}$, $z=\frac{15}{17}$. Le premier gain sera donc exprimé par la fraction $\frac{45}{17}$, le second par la fraction $\frac{31}{17}$, et le troisième par

la fraction $\frac{15}{17}$. Ces fractions expriment des parties d'écu, ou de livre, ou de sou, etc., selon qu'on prend pour unité, l'écu, ou la livre, ou le sou, etc.

Pour second exemple, supposons $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. On trouvera $x = -\frac{20}{17}$, $y = \frac{24}{17}$, $z = \frac{50}{17}$. En ce cas, la valeur de x étant négative, cela signifie (19) qu'il faut prendre x dans un sens opposé à celui qu'on lui a attribué dans le procédé du calcul. Ainsi, au lieu de supposer que le premier joueur a fait un *gain*, il faut supposer qu'il a fait une *perte*. Cette perte est exprimée par $\frac{20}{17}$, tandis que les gains des deux autres joueurs sont exprimés respectivement par $\frac{24}{17}$ et $\frac{50}{17}$. En effet, une perte de $\frac{20}{17}$ et la moitié de la somme des deux gains $\frac{24}{17}$, $\frac{50}{17}$, ne font que 1 de gain effectif, comme cela doit être en vertu de la première équation $x + \frac{y+z}{2} = a$, ou $x + \frac{y+z}{2} = 1$. On prouvera de même que les conditions des deux autres équations, $y + \frac{x+z}{3} = b = 2$, $z + \frac{x+y}{4} = c = 3$, sont remplies par les valeurs $x = -\frac{20}{17}$, $y = \frac{24}{17}$, $z = \frac{50}{17}$.

Si, en établissant les équations fondamentales du probléme, au lieu de supposer que x, y, z, expriment trois gains, ou trois quantités de même genre que a, b, c, on avoit supposé que x exprime une perte, tandis que y et z expriment des gains ou des quantités de même genre que a, b, c; il est évident qu'on auroit eu les trois équations $- \quad + \frac{y+z}{2} = a$, $\quad + \frac{z-x}{3} = b$, $z + \frac{y-x}{4} = c$; d'où l'on tire, $x = \frac{8c + 9b - 22a}{17}$, $y = \frac{21b - 6a - 4c}{17}$, $z = \frac{20c - 3b - 4a}{17}$.

Alors, en supposant $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, on trouveroit $x = \frac{20}{17}$, $y = \frac{24}{17}$, $z = \frac{50}{17}$. La valeur de x se produit maintenant sous une forme positive, parce qu'en établissant les équations générales, on a supposé que x exprimoit

une perte, et qu'on a achevé le calcul conséquemment à cette supposition. Mais si on vouloit se servir de ces mêmes équations pour résoudre le cas où l'on auroit $a=4$, $b=3$, $c=2$, on trouveroit, $x=-\frac{45}{17}$, $y=\frac{31}{17}$, $z=\frac{15}{17}$. La valeur de x est maintenant négative; et cela signifie que x doit être prise dans un sens contraire à celui qu'on lui a attribué dans les nouvelles équations, c'est-à-dire, que cette quantité doit être regardée comme un gain, et non pas comme une perte.

133. *Scholie I.* La remarque que nous venons de faire sur la manière dont les inconnues doivent être envisagées, selon qu'elles se présentent avec le signe +, ou avec le signe —, n'est pas particulière à l'exemple qui l'a fait naître; elle est vraie généralement. Voici donc une maxime universelle et très-importante dans l'algèbre. Lorsque vous avez une question à résoudre, et que par l'énoncé de ses termes, vous ne voyez pas si la quantité que vous cherchez doit être positive ou négative, c'est-à-dire, si cette quantité doit être prise ou dans le sens de celles qui sont regardées comme positives, ou dans le sens de celles qui sont regardées comme négatives, ne vous en mettez pas en peine; regardez l'inconnue comme positive, et achevez toutes les parties de votre calcul conséquemment à cette supposition : si dans l'équation finale la valeur de l'inconnue est positive, cela fait voir que votre supposition étoit légitime; si au contraire la valeur de l'inconnue est négative, cela signifie que l'inconnue doit être prise dans un sens contraire à celui que vous lui avez attribué dans le procédé du calcul. Le même raisonnement auroit lieu dans un ordre inverse, si l'on avoit regardé l'inconnue comme négative. Le calcul redresse dans tous les cas les fausses suppositions qu'on peut avoir faites en établissant ses éléments; et c'est là un des plus précieux avantages de l'algèbre.

134. *Scholie II.* Il en est, au même égard, des quantités connues comme des inconnues. Si dans les applications particulières qu'on peut faire d'une équation qui exprime

généralement les conditions d'un problême, on regarde comme négatives des quantités connues a, b, c, etc., qui ont été regardées comme positives dans le calcul, cela signifiera que ces quantités doivent être prises dans des sens contraires à ceux qu'on leur a d'abord attribués. Reprenons, par exemple, le problême de l'article 126, et voyons comment on peut tirer de l'équation générale $t = \frac{qan + qmh}{np - qm}$ qu'il nous a fournie, la solution du problême suivant: *Deux courriers qui vont à la rencontre l'un de l'autre partent l'un de Paris, l'autre de Lyon; le courrier de Paris fait* 3 *lieues en* 1 *heure, celui du Lyon* 2 *lieues en en* 1 *heure: on demande au bout de quel temps ils se rencontreront, en supposant que le courrier de Lyon parte* 6 *heures avant celui de Paris, et que l'intervalle de chemin compris entre Paris et Lyon soit de* 100 *lieues.*

Regardons le courrier de Paris comme le premier, et celui de Lyon comme le second. D'abord la lettre a, que nous avons prise dans l'article 126 pour représenter la distance des points de départ des deux couriers, nous représentera ici la distance de Paris à Lyon. Ainsi nous avons $a = 100$ lieues. Le temps t que marche le second courrier étant pris positivement, on doit prendre h négativement, parce que dans la solution générale on a supposé que le premier courrier partoit le premier, au lieu qu'ici c'est le second qui part le premier. Nous aurons donc $h = -6$ heures. De même, l'espace p que parcourt le second courrier pendant le temps q, étant pris positivement, l'espace m que parcourt le premier courrier pendant le temps n, doit être pris négativement, parce que dans la solution générale on a supposé que le premier courrier s'éloignoit, au lieu qu'ici on suppose qu'il va au devant du second. Quant aux deux temps q et n, ils doivent être pris l'un et l'autre positivement, parce qu'ils s'écoulent dans le même sens pendant que les courriers marchent, ou que l'un peut être regardé comme faisant partie de l'autre. Nous aurons donc $p = 2$ lieues; $m = -3$ lieues; $q = 1$ heure; $n = 1$ heure. Substituant toutes

valeurs numériques à la place des valeurs littérales correspondantes dans la formule $t = \frac{qan + qmh}{np - qm}$, elle deviendra $t = \frac{1 \times 100 \times 1 + 1 \times -3 \times -6}{1 \times 2 - 1 \times -3} = \frac{100 + 18}{2 + 3} = \frac{118}{5} = 23\frac{3}{5}$. Ainsi le courrier de Lyon, 23 heures et $\frac{3}{5}$ après son départ, rencontrera celui de Paris.

L'espace $\frac{pan + pmh}{np - qm}$, parcouru par le même courrier depuis Lyon jusqu'au point de rencontre, sera $\frac{2 \times 100 \times 1 + 2 \times -3 \times -6}{1 \times 2 - 1 \times -3} = \frac{236}{5}$, c'est-à-dire, 47 lieues $\frac{1}{5}$; et par conséquent l'espace parcouru par le premier courrier depuis Paris jusqu'au point de rencontre, sera 52 lieues et $\frac{4}{5}$.

On peut s'assurer de la justesse de tous ces résultats, en résolvant directement de la manière suivante le problème dont il est question.

Nommons toujours t le temps que marche le courrier de Lyon avant que de rencontrer celui de Paris. Le courrier de Lyon, qui fait 2 lieues par heure, parcourra pendant le temps t un espace $= 2t$; le courrier de Paris, qui fait 3 lieues par heure, et qui part 6 heures après celui de Lyon, parcourra, pendant le temps $t - 6$, un espace $= 3(t - 6)$. Or, la somme de ces deux espaces n'est autre chose que l'espace total compris entre Paris et Lyon. Ainsi on aura l'équation $2t + 3(t - 6) = 100$; d'où l'on tire $t = 23$ heures $\frac{3}{5}$, comme ci-dessus. L'espace $2t$, parcouru par le courrier de Lyon, est par conséquent 47 lieues $\frac{1}{5}$; et l'espace parcouru par celui de Paris, 52 lieues $\frac{4}{5}$.

135. Problème X. *Deux troupeaux de bœufs qu'on lâche dans deux prés, étant supposés manger en des temps donnés, et les herbes qui y étoient au premier instant, et les herbes qui y croissent uniformément pendant que les bœufs paissent; on demande combien il faudra de bœufs pour manger, suivant les mêmes conditions, les herbes d'un troisième pré.*

Nommons le nombre des bœufs du premier troupeau

qui mange le premier pré . . . . a,
l'étendue de ce pré. . . . . b,
le temps pendant lequel toutes les herbes crues et à croître en sont mangées. . . . . c;
le nombre des bœufs du second troupeau qui mange le second pré . . . . d,
l'étendue de ce pré. . . . . e,
le temps pendant lequel toutes les herbes en sont mangées . . . . f,
le nombre inconnu des bœufs du troisième troupeau qui mange le troisième pré . . . . x,
l'étendue de ce pré. . . . . g,
le temps pendant lequel les herbes en sont mangées . h.

De plus, imaginons que chaque troupeau de bœufs est partagé en deux bandes, dont l'une mange l'herbe contenue au premier instant dans chaque pré, et l'autre mange l'herbe qui croît pendant que les bœufs paissent. Nommons,

pour le 1.er troupeau, la 1.re bande . . . . y,
et par conséquent la seconde . . . . $a-y$;
pour le 2.e troupeau, la 1.re bande . . . . z;
et par conséquent la seconde. . . . . $d-z$,
pour le 3.e troupeau, la 1.re bande . . . . u,
et par conséquent la seconde . . . . $x-u$.

Nous avons quatre inconnues, x, y, z, u, à déterminer. Toutes les autres quantités, a, b, c, d, e, f, g, h, sont supposées connues.

Cela posé, 1.° il est clair que les premières bandes y, z, u, de bœufs sont entre elles, comme les étendues des prés, divisées par les temps correspondants; car il faut d'autant plus de bœufs pour manger une quantité constante et donnée d'herbe contenue dans un pré, que ce pré a plus d'étendue, et que le temps employé à manger la quantité en question est plus court. On aura donc ces deux proportions, $y : z :: \frac{b}{c} : \frac{e}{f}$, $y : u :: \frac{b}{c} : \frac{g}{h}$, lesquelles donnent, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, les deux équations, $cey = bfz$, $cgy = bhu$.

2.° Les secondes bandes $a-y$, $d-z$, $x-u$, qui mangent les herbes qui croissent pendant que les bœufs paissent, sont entre elles simplement comme les étendues des prés; les temps n'entrent pour rien dans ce rapport; car, par hypothèse, les herbes dont il s'agit croissent en quantités égales, en temps égaux, puisqu'elles sont mangées à mesure qu'elles croissent. D'où il s'ensuit que les quantités totales de ces mêmes herbes, sont proportionnelles aux nombres de bœufs qui les mangent; et comme, elles sont aussi évidemment proportionnelles aux étendues des prés, on a ces deux proportions, $a-y:d-z::b:e$, $a-y:x-u::b:g$, lesquelles donnent les deux équations, $ae-ey=bd-bz$, $ag-gy=bx-bu$.

Les deux premières équations donnent $z=\frac{cey}{bf}$, $u=\frac{cgy}{bh}$. Mettons pour z sa valeur dans la troisième; nous trouverons $y=\frac{afe-bdf}{fe-ce}$, et par conséquent $u=\frac{cg(afe-bdf)}{bh(fe-ce)}$, $z=\frac{ce(afe-bdf)}{bf(fe-ce)}$.

Mettons les valeurs de y et de u dans la quatrième équation, $ag-gy=bx-bu$; nous trouverons

$$x=\frac{acefg+bdfgh-acegh-bcdfg}{bh(fe-ce)},$$

ou bien $x=\frac{aceg(f-h)+bdfg(h-c)}{beh(f-c)}$.

Supposons, par exemple, que le premier pré ait 4 arpents (1) d'étendue, le second 5, le troisième 6; qu'il faille 8 bœufs pour manger en 7 semaines les herbes du premier, 9 bœufs pour manger en 8 semaines les herbes du second, et que les herbes du troisième pré doivent être mangées en 12 semaines; nous aurons, conséquemment à ces suppositions, $a=8$, $b=4$, $c=7$, $d=9$, $e=5$,

(1) L'arpent, suivant l'ordonnance de 1669 pour les eaux et forêts, avoit 100 perches de longueur sur 1 perche de largeur, la perche étant supposée de 22 pieds, ce qui compose une superficie de 100 perches quarrées, ou de $1344\frac{4}{9}$ toises quarrées.

$f=8$, $g=6$, $h=12$. En substituant toutes ces valeurs dans l'expression générale de x, on trouvera $x=8$. Ainsi il faudra 8 bœufs pour manger les herbes du troisième pré.

136. *Remarque I.* Quelquefois on a en apparence autant d'équations que d'inconnues, et cependant le problême est indéterminé. Cela arrive lorsque des conditions qui paroissent différentes ne sont réellement que la même qui se reproduit sous une autre forme. Supposons, par exemple, qu'on propose cette question, *Trouver deux nombres tels que le quart de leur somme fasse* 48, *et que la moitié plus le quart de leur somme fasse* 144. En nommant x le premier nombre cherché, y le second, on aura ces deux équations, $\frac{x+y}{4}=48$, $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})(x+y)=144$. La première donne $x=192-y$, et la seconde donne également $x=192-y$. Ces deux valeurs de x sont les mêmes. Par conséquent la question n'a réellement qu'une seule condition, et ne fournit réellement qu'une seule équation. En effet, avec un peu d'attention on s'aperçoit qu'en disant que le quart de $(x+y)$ est 48, c'est dire, en d'autres termes, que la moitié plus le quart, ou les trois quarts de $(x+y)$, sont le triple de 48, ou bien 144. Dans ces sortes de cas, le calcul fait connoître de lui-même si les conditions exprimées sont réellement différentes ou reviennent au même. Car, si elles sont différentes, il donne des équations différentes pour une même inconnue; si elles sont les mêmes, il donne des équations identiques pour une même inconnue, comme dans l'exemple précédent, où l'on est parvenu à ces deux équations identiques, $x=192-y$, $x=192-y$.

137. *Remarque II.* Au contraire, les conditions d'une question donnent quelquefois plus d'équations qu'on n'a d'inconnues à déterminer. Alors, pour que la question soit possible, et ne renferme aucune absurdité, il faut que les quantités connues aient entre elles une relation telle que toutes les équations puissent avoir lieu à-la-f
Par exemple, supposons que les conditions d'un probl

...ces algébriquement, nous donnent ces trois équations $ax + by = c$, $dx + ey = g$, $hx - my = n$; les quantités $a, b, c, d, e, f, g, h, m, n$, étant connues, x et y ... inconnues.

Les deux premières équations, comparées ensemble, donnent $x = \frac{ce - bg}{ae - bd}$, $y = \frac{ag - cd}{ae - bd}$.

La première et la troisième, comparées ensemble, donnent $x = \frac{mc + bn}{ma + bh}$, $y = \frac{hc - an}{ma + bh}$.

Si donc les conditions du problême ne renferment aucune incompatibilité, il faut que les deux valeurs de x soient égales entre elles, et que les valeurs de y soient égales entre elles; c'est-à-dire, il faut qu'on ait $\frac{ce - bg}{ae - bd} = \frac{mc + bn}{ma + bh}$, $\frac{ag - cd}{ae - bd} = \frac{hc - an}{am + bh}$.

Ces deux dernières équations n'expriment réellement qu'une seule et même condition; car lorsqu'après avoir égalé entre elles les deux valeurs de x, on égale ensuite les deux valeurs de y, cette seconde opération revient à la première, puisque les valeurs de y dépendent de celles de x, ou réciproquement. En effet, les deux équations dont il s'agit se réduisent l'une et l'autre à celle-ci, $hce - bgh - mag = aen - bdn - cdm$, qui exprime par conséquent la relation que les quantités connues doivent avoir entre elles pour que la question proposée soit possible. Si cette équation n'avoit pas lieu, la question seroit impossible. On trouveroit cette même *équation de condition*, si, en cherchant les valeurs de x et de y, on comparoit la première équation primordiale avec la troisième, puis la seconde avec la troisième, au lieu de comparer successivement, comme on a fait, la première avec les deux autres.

138. *Remarque III.* Il y a des questions qui ne donnent pas plus d'équations que d'inconnues, et qui cependant sont impossibles. Le calcul fait connoître cette impossi-

bilité; car alors, dans le résultat numérique, on trouve que deux nombres différents devroient être égaux entre eux; ce qui est absurde. Par exemple, supposons qu'un probléme mène à ces deux équations, $2x + 3y = 20$, $4x + 6y = 30$: la première donne $y = \frac{20 - 2x}{3}$, et la seconde $y = \frac{30 - 4x}{6}$. On auroit donc $\frac{20 - 2x}{3} = \frac{30 - 4x}{6}$, ou bien $120 - 12x = 90 - 12x$, ou bien $120 = 90$, ce qui est absurde. Le probléme qui donne lieu à un tel résultat renferme donc des contradictions dans ses termes, et n'est par conséquent susceptible d'aucune solution.

CHAPITRE IX.

Formule générale pour élever un binome à une puissance quelconque.

139. Lorsque l'exposant de la puissance est un nombre entier positif, le probléme n'a presque aucune difficulté, comme on va le voir; il en a davantage quand l'exposant est un nombre fractionnaire ou négatif. J'emploierai pour ces derniers cas la méthode très-ingénieuse et très-simple que Euler a donnée (*Nouv. Mém. de l'academ. de Pétersbourg, tome XIX, an.* 1774).

140. Probléme I. *Elever le binome* a + b *à la puissance entière positive* n.

On voit qu'il s'agit de développer l'expression $(a + b)^n$, ou de former un produit dans lequel $a + b$ entre comme facteur autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre entier positif n; ce qui s'indique ainsi, $(a + b) \times (a + b) \times (a + b)$.......... Je suppose pour un moment, afin de reconnoître sans peine la loi qui régnera dans les différents termes de ce produit effectué, que les facteu

composants, au lieu d'être tous $a+b$, soient $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $a+f$, etc. En multipliant d'abord $a+b$ par $a+c$, et ordonnant par rapport à a, on aura,

$$\begin{array}{ll|l} a^2 & +b & a+bc. \\ & +c & \end{array}$$

Multipliant ce produit par $a+d$, on aura,

$$\begin{array}{ll|ll|l} a^3 & +b & a^2 & +bc & a+bcd. \\ & +c & & +bd & \\ & +d & & +cd & \end{array}$$

Multipliant ce produit par $a+e$, on aura,

$$\begin{array}{ll|ll|ll|l} a^4 & +b & a^3 & +bc & a^2 & +bcd & a+bcde. \\ & +c & & +bd & & +bce & \\ & +d & & +be & & +bde & \\ & +e & & +cd & & +cde & \\ & & & +ce & & & \\ & & & +de & & & \end{array}$$

Multipliant ce produit par $a+f$, puis le produit résultant par $a+g$, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé le nombre n de facteurs, on formera le produit final :

$$\begin{array}{ll|ll|ll|l} a^n & +b & a^{n-1} & +bc & a^{n-2} & +bcd & a^{n-3}+\text{etc.} \\ & +c & & +bd & & +bce & \\ & +d & & +be & & +bcf & \\ & +e & & +bf & & +cde & \\ & +f & & +cd & & +cdf & \\ & +\text{etc.} & & +ce & & +\text{etc.} & \\ & & & +\text{etc.} & & & \end{array}$$

D'où l'on voit 1.° que le premier terme de ce produit contient simplement a^n, c'est-à-dire, la première lettre a élevée à la puissance n.

2.° Que le second terme contient a^{n-1}, avec un coëfficient égal à la somme des lettres b, c, d, e, etc., lesquelles sont au nombre de n. Donc, si toutes ces lettres sont égales entre elles (ce qui est le cas du problème), et qu'on les exprime chacune par b, le coëfficient de a^{n-1} sera $b \times n$.

3.° Que le troisième terme contient a^{n-2}, avec un coëfficient égal à la somme des produits qu'on forme en multipliant deux à deux les lettres b, c, d, e, f, etc. sans répéter plus d'une fois la même lettre. Or (Arith. 245), le nombre de ces produits $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$. Ainsi les lettres b, c, d, e, f, etc., devenant égales, et chacune étant exprimée par b, le coëfficient de a^{n-2} sera $b^2 \times \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$.

4.° Que le quatrième terme contient a^{n-3}, avec un coëfficient égal à la somme des produits que l'on forme en multipliant trois à trois les lettres b, c, d, e, f, etc., sans répéter plus d'une fois la même lettre. Or, par l'article cité de l'Arithmétique, le nombre de ces produits $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Ainsi, les lettres b, c, d, e, f, etc., devenant égales, et chacune étant exprimée par b, le coëfficient de a^{n-3} sera $b^3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

5.° Que le cinquième terme contient a^{n-4}, avec un coëfficient égal à la somme des produits que l'on forme en multipliant quatre à quatre les lettres b, c, d, e, f, etc., sans répéter plus d'une fois la même lettre. Or le nombre de ces produits $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Ainsi les lettres b, c, d, e, f, etc., devenant égales, et chacune étant exprimée par b, le coëfficient de a^{n-4}, sera $b^4 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Et en continuant à raisonner de même pour les termes suivants, on verra que, dans le cas de notre problème, le coëfficient de a^{n-5} est $b^5 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$; que celui de a^{n-6} est $b^6 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$, etc.

De là il suit qu'on a en général, lorsque l'exposant n est un nombre entier positif, $(a+b)^n = a^n +$

$na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$
$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4}b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$ etc.

Cette suite s'arrête ou s'interrompt, lorsque le nombre n est égal à l'un des nombres qui viennent après avec le signe —, parce que, dès ce moment, tous les termes ont un facteur qui est zéro.

141. Exemple. *On demande la cinquième puissance de* a + b.

En ce cas, $n = 5$; et la formule précédente donne $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Les termes suivants de la formule générale sont alors zéro.

142. *Remarque.* Si le binome qu'il s'agit d'élever à la puissance n étoit $a - b$, il faudroit mettre dans la formule le signe — au-devant de tous les termes où b est élevé à des puissances impaires. Par là on auroit : $(a - b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)n^{n-2}b^2}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ etc.

143. *Corollaire.* On élevera par la même méthode un polynome quelconque à la puissance entière et positive n. Soit, par exemple, le trinome $a + b + c$: en faisant d'abord $b + c = p$, on aura $(a + b + c)^n = (a + p)^n = a^n + na^{n-1}p + \frac{n(n-1)a^{n-2}p^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}p^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$etc. Ensuite on substituera pour p sa valeur, et pour p^2, p^3, p^4, etc., leurs valeurs qui se trouvent par la formule proposée. De même, si on avoit le quadrinome $a + b + c + d$, on feroit d'abord $b + c + d = q$; et après avoir développé l'expression $(a + q)^n$; on élimineroit q et ses puissances, ce qui ramène le cas du quatrinome à celui du trinome; ainsi de suite.

144. Problème II. *Elever le binome* a + b *à la puissance quelconque* n.

D'abord, puisque $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, on aura aussi

$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n(1+x)^n$, en faisant, pour abréger, $\frac{b}{a}=x$. Il s'agit donc de développer en général l'expression $(1+x)^n$: ensuite on multipliera tous ses termes par a^n, on éliminera x, et on aura $(a+b)^n$.

Or, si n étoit un nombre entier positif, on auroit (140)

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}$$

Mais l'exposant n étant maintenant un nombre quelconque, la valeur de la suite $1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ + etc., doit être regardée comme inconnue : je la représente par le symbole $[n]$: en sorte qu'ici $[n] = 1+nx$ $+\frac{n(n-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ + etc.

Soit une autre formule analogue :

$$[m] = 1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}$$

Je multiplie l'une par l'autre les deux séries :

$$(\text{M})\ 1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}$$

$$(\text{N})\ 1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc};$$

ce qui me donne la nouvelle série :

$$1+(m+n)x+\left(\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+mn+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{nm(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{mn(m-1)}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)x^3+\text{etc.}:$$

ou bien (en représentant les coëfficients de x, de x^2, de x^3, etc., par les lettres capitales A, B, C, D, etc.),

$$1+\text{A}x+\text{B}x^2+\text{C}x^3+\text{D}x^4+\text{etc.}$$

De sorte que $\text{A}=m+n$, $\text{B}=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+mn+\frac{n(n-1)}{1}$ $=\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}$. Les autres coëfficients C, D, E

se déterminent de même ; mais le calcul devient très-long ; et il est difficile d'apercevoir de cette manière la loi suivant laquelle tous ces coëfficients se forment. La question est donc de parvenir à ce but par une voie simple et claire. Or, il faut observer pour cela que tous les coëfficients A, B, C, D, etc., se composent des lettres m et n, toujours suivant la même loi, quels que soient les nombres m et n ; c'est-à-dire, soit que ces nombres soient entiers, positifs, ou fractionnaires, ou négatifs ; puisque, dans le calcul général, on ne leur donne aucune signification déterminée, aucun signe particulier. Cette identité de composition, à laquelle il faut bien prendre garde, est la base de la méthode de Euler, que j'explique ici.

D'après ces principes, puisque, dans le cas où m et n sont des nombres entiers positifs, les valeurs respectives des séries (M) et (N) sont $(1+x)^m$, $(1+x)^n$; et que par conséquent leur produit est $(1+x)^m \times (1+x)^n$, ou $(1+x)^{m+n}$, ou (140), $1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)x^2}{1\,.\,2}$ $+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+$ etc., il s'ensuit que lorsque m et n sont des nombres quelconques, le produit des deux séries (M) et (N), dont les valeurs sont alors $[m]$, $[n]$, est aussi $1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)x^2}{1\,.\,2}$ $+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+$ etc. Or, en regardant $(m+n)$ comme un exposant simple, on a, suivant la notation proposée ci-dessus, $[m+n]=1+(m+n)x$ $+\frac{(m+n)(m+n-1)x^2}{1\,.\,2}+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)x^3}{1\,.\,2\,.\,3}$ $+$ etc. Donc $[m+n]=[m]\,.\,[n]$; et on a de même $[m+n+p]=[m]\,.\,[n]\,.\,[p]$; $[m+n+p+q]=[m]\,.\,[n]\,.\,[p]\,.\,[q]$. Ainsi de suite.

Supposons que les nombres m, n, p, q, etc. deviennent égaux, et qu'on les présente tous par m : on aura $[2m]=[m]^2$; $[3m]=[m]^3$; $[4m]=[m]^4$; et en général $[km]=[m]^k$, k étant un nombre entier positif.

Maintenant, soit i un nombre entier positif quelconque; et supposons d'abord $2m = i$, ou $m = \frac{i}{2}$: on aura $[i] = \left[\frac{i}{2}\right]^2$. Or, puisque i est un nombre entier positif, on a $[i] = [1 + x]^i$; donc $\left[\frac{i}{2}\right]^2 = (1 + x)^i$; et, en tirant la racine quarrée, $\left[\frac{i}{2}\right] = (1 + x)^{\frac{i}{2}}$. Et comme la valeur de l'expression $\left[\frac{i}{2}\right]$ est la série $1 + \frac{i}{2}x + \frac{\frac{i}{2}\left(\frac{i}{2} - 1\right)x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\frac{i}{2}\left(\frac{i}{2} - 1\right)\left(\frac{i}{2} - 2\right)x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ etc., nous aurons aussi la même série pour la valeur de $(1 + x)^{\frac{i}{2}}$. Ainsi voilà, pour le cas où l'exposant n de la puissance du binome est un nombre positif fractionnaire de l'espèce $\frac{i}{2}$, une formule analogue à celle où n seroit un nombre entier positif.

Semblablement, si l'on suppose $3m = i$, ou $m = \frac{i}{3}$, on aura $[i] = \left[\frac{i}{3}\right]^3 = (1 + x)^i$; et, en tirant la racine cube, $\left[\frac{i}{3}\right] = (1 + x)^{\frac{i}{3}}$. Or, $\left[\frac{i}{3}\right] = 1 + \frac{ix}{3} + \frac{\frac{i}{3}\left(\frac{i}{3} - 1\right)x^2}{1 \cdot 2}$ + etc. Donc la même série est la valeur de $(1 + x)^{\frac{i}{3}}$.

Ainsi des autres puissances fractionnaires positives.

Il ne reste plus qu'à faire voir qu'on aura encore une formule de la même espèce, lorsque l'exposant n de la puissance du binome sera un nombre négatif, entier ou rompu.

Reprenons, pour cela, la formule $[m + n] = [m] \cdot [n]$, qui a toujours lieu, quels que soient m et n, comme nous l'avons déja remarqué. Supposons que n soit un nombre

positif, entier, ou rompu : nous aurons $[n] = (1 + x)^n$. Faisons ensuite $m = -n$, ou $m + n = 0$; nous aurons $[0] = (1 + x)^0 = 1$. Substituant ces valeurs dans la formule $[m + n] = [m] \cdot [n]$, nous aurons $1 = [m] \cdot [n]$; ou $[m] = \frac{1}{(1 + x)^n}$; ou $[-n] = (1 + x)^{-n}$. Or, la valeur de l'expression $[-n]$ est la série $1 - nx + \frac{(-n)(-n-1)x^2}{1 \cdot 2} + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ etc. Donc, cette même série est aussi la valeur de $(1 + x)^{-n}$.

145. *Corollaire général.* Il résulte des deux problêmes précédents, qu'on a en général (quel que soit l'exposant n positif ou négatif, entier ou rompu), $(a \pm b)^n = a^n \pm a^{n-1} b \pm \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ etc.

146. *Scholie.* Un des principaux usages de cette formule est de donner, par une approximation expéditive, les racines des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites.

147. Exemple I. *On demande la racine quarrée approchée du nombre* 150, *qui n'est pas un quarré parfait.*

Comme tout nombre entier non quarré est toujours compris entre deux quarrés entiers consécutifs, c'est-à-dire, entre deux quarrés dont les racines ne diffèrent que d'une unité; je considère d'abord que 150 est compris entre les deux quarrés consécutifs 144 et 169 (ceux de 12 et de 13), mais plus voisin du premier que du second.

Je suppose donc $150 = 144 + 6 = a + b$; et la question est d'appliquer ici la série qui représente $(a + b)^{\frac{1}{2}}$, ou $(144 + 6)^{\frac{1}{2}}$. Or, en faisant $a = 144$, $b = 6$, on trouve $(144 + 6)^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{150} = 12 + \frac{6}{24} - \frac{36}{8 \cdot 1728} + \frac{216}{16 \cdot 248832}$ - etc.; ce qui forme une série très-convergente. Il suffira prendre ses quatre premiers termes pour avoir la valeur approchée de toute la série. En effet, on trouve que

l'assemblage de ces termes vaut à peu près 12,249, qui diffère à peine de $\frac{1}{1000}$ de la vraie racine de 150, comme on peut le vérifier en tirant la racine quarrée approchée de 150, par la méthode expliquée dans l'arithmétique.

148. Exemple II. *On demande la racine quarrée approchée de* 1289, *qui n'est pas un quarré parfait.*

Le plus grand quarré contenu dans ce nombre est 1225, dont la racine est 35 ; et le quarré immédiatement supérieur est 1296 dont la racine est 36. Ainsi le nombre supposé 1289 est compris entre les deux quarrés conséçutifs 1225, 1296, mais plus voisin du second que du premier. Je suppose donc $1289 = 1296 - 7$; et faisant $a = 1296$, $b = 7$ dans la seconde formule de l'article 145, nous aurons $(1296 - 7)^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{1289} = 36 - \frac{7}{72} - \frac{49}{8 \cdot 46656} -$ etc. L'assemblage des trois premiers termes de cette série donne 35,903 pour la racine quarrée approchée de 1289.

149. Exemple III. *Trouver l'expression de la racine cube de* $\frac{1}{a+b}$.

Il est question, comme on voit, de développer l'expression $(a+b)^{-\frac{1}{3}}$. Or, ce développement est la série :

$$a^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{4}{3}}b + \frac{2a^{-\frac{7}{3}}b^2}{9} - \frac{14a^{-\frac{10}{3}}b^3}{81} + \text{etc.}$$

Si on demandoit la racine cube de la fraction $\frac{f}{a \pm b}$, cette racine indiquée seroit d'abord $f^{\frac{1}{3}} \times (a \pm b)^{-\frac{1}{3}}$. Ainsi, après avoir formé la série qui est la valeur de $(a \pm b)^{-\frac{1}{3}}$, on multiplieroit chacun de ses termes par $f^{\frac{1}{3}}$.

S'il falloit extraire la racine quatrième de $\frac{f+g}{a+b}$, cette racine indiquée seroit d'abord $(f+g)^{\frac{1}{4}} \times (a+b)^{-\frac{1}{4}}$.

après avoir formé les deux séries qui sont les valeurs des deux facteurs du produit, on les multiplieroit l'une par l'autre. Ainsi des autres.

Tout cela s'applique avec la même facilité à un polynome quelconque.

CHAPITRE X.

Théorie générale des proportions et progressions arithmétiques et géométriques.

150. Nous avons défini dans l'arithmétique les proportions arithmétiques et géométriques.

On appelle *progression arithmétique* une suite de termes dont chacun est également surpassé par celui qui le suit, ou surpasse également celui qui le suit : telles sont la suite ascendante 3, 5, 7, 9, 11, dont la différence *additive* d'un terme à l'autre est 2; et la suite descendante 31, 28, 25, 22, 19, dont la différence *soustractive* d'un terme à l'autre est 3. En général, que les quantités f, g, h, i, k, forment une progression arithmétique croissante ou décroissante, on l'écrit ainsi $\div f . g . h . i . k$.

Une suite dont chaque terme est également contenu dans celui qui le suit, ou contient également celui qui le suit, s'appelle une *progression géométrique* : telles sont la suite ascendante 2, 4, 8, 16, 32, dont chaque terme est contenu *deux fois* dans le suivant; et la suite descendante 324, 108, 36, 12, 4, dont chaque terme contient *trois fois* le suivant. En général, que les quantités f, g, h, i, k, forment une progression géométrique, croissante ou décroissante, on l'écrit ainsi : $\because f:g:h:i:k$.

Quand on dit simplement qu'une suite est une proportion ou une progression, c'est toujours de la proportion ou de la progression géométrique qu'on veut parler, à moins que le discours ne regarde la proportion ou progression arithmétique.

SECTION I.

Des proportions et progressions arithmétiques.

151. Théorême I. *Dans toute proportion arithmétique* m . n : p . q, *la somme* m + q *des extrêmes est égale à la somme* n + q *des moyens.*

Car en nommant d la différence additive ou soustractive de la proportion, on a $n = m + d$, $q = p + d$; par conséquent la proportion peut être écrite ainsi, $m . m + d : p . p + d$; d'où l'on voit, en prenant la somme des extrêmes et celle des moyens, que ces deux sommes sont composées de parties identiques.

En nombres, si on a, 3 . 5 : 7 . 9, on aura $3 + 9 = 5 + 7$.

152. *Corollaire I.* Il peut arriver que l'un des termes de la proportion soit zéro; et alors l'une des deux sommes, qui sont toujours égales, se réduit à un seul extrême ou à un seul moyen.

153. *Corollaire II.* Si la proportion est *continue*, c'est-à-dire, si les deux moyens sont égaux, ou qu'on ait, $m . n : n . p$, la somme des extrêmes sera double de l'un des moyens. En nombres, si on a 3 . 5 : 5 . 7, on aura $3 + 7 = 5 + 5$.

Pour abréger, au lieu d'écrire la proportion continue à l'ordinaire, $m . n : n . p$, on l'écrit ainsi $\div m . n . p$.

154. Théorême II. *Réciproquement si quatre termes* m, n, p, q, *sont tels que la somme* m + q *des extrêmes soit égale à la somme* n + p *des moyens, ces quatre termes formeront une proportion arithmétique.*

Car puisque $m + q = n + p$, on aura, $m - n = p - q$; d'où résulte la proportion, $m . n : p . q$.

155. *Scholie.* Il suit de ces principes que si, dans une proportion arithmétique quelconque, on connoît trois termes, on pourra trouver celui qui manque : car si l'on connoît les deux moyens et un extrême, on aura l'extrême inconnu, en retranchant de la somme des moyens l'extrême connu; si l'on connoît deux extrêmes et un moyen,

on aura le moyen inconnu, en retranchant de la somme des extrêmes le moyen connu.

156. Théorême III. *Dans toute progression arithmétique*
÷ f . g : h . i . k . l . m . etc.
Un terme quelconque est égal à un autre, plus la différence additive ou soustractive de la progression, répétée autant de fois qu'il y a de termes depuis l'un inclusivement jusqu'à l'autre exclusivement.

Car soit d la différence positive ou négative de la progression : on a,

$$g = f + d,\ h = g + d = f + 2d,\ i = h + d = f + 3d, \text{ etc.}$$

Par conséquent la progression peut être écrite ainsi :

$$\div f . f + d . f + 2d . f + 3d . f + 4d . f + 5d . f + 6d, \text{ etc.}$$

Alors on voit, par exemple, que le cinquième terme est égal au premier, plus quatre fois la différence; que le septième terme est égal au second, plus cinq fois la différence.

157. *Corollaire I.* Donc, si l'on connoît un terme et la différence, on pourra déterminer un terme dont la place est connue, sans être obligé de calculer les autres. Par exemple, si l'on connoît le premier terme et la différence, on aura le centième terme, en ajoutant au premier 99 fois la différence.

158. *Corollaire II.* Donc, si dans une progression arithmétique on prend quatre termes tels qu'il y en ait autant entre le premier et le second, qu'entre le troisième et le quatrième, ces quatre termes formeront une proportion arithmétique, puisque la différence des deux premiers et celle des deux derniers contiennent la différence de la progression répétée le même nombre de fois, et sont par conséquent égales. Et comme, dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens (151), il s'ensuit que la somme des extrêmes de quatre termes, pris deux à deux à intervalles égaux, dans une progression arithmétique, est égale à la somme des moyens.

159. *Corollaire III.* Le même théorême fournit la manière d'insérer un nombre quelconque de moyens propor-

tionnels arithmétiques entre deux termes donnés. Par exemple, soient les nombres 3 et 120 entre lesquels on veut insérer 12 moyens proportionnels arithmétiques : on voit que la question est de former une progression arithmétique dont 3 et 120 sont les extrêmes, et qui ait en tout 14 termes. Or, le dernier 120 est égal au premier, plus 13 fois la différence. Donc, si de 120 je retranche 3, et que je divise le reste 117 par 13, le quotient 9 sera la différence de la progression. Ayant le premier terme et la différence, on peut déterminer en particulier chacun des termes de la progression.

160. *Corollaire IV.* Si entre tous les termes d'une progression arithmétique on insère un même nombre quelconque de moyens proportionnels arithmétiques, la nouvelle suite que l'on formera sera encore une progression arithmétique. Car si, par exemple, on insère quatre moyens proportionnels arithmétiques entre les termes de la progression arithmétique $\div f \,.\, g \,.\, h \,.\, i \,.\, k \,.\, l$; on verra par l'article précédent que la première progression partielle, c'est-à-dire, celle de f à g, a pour différence particulière $\frac{d}{5}$; que la seconde progression partielle, ou celle de g à h, a pareillement pour différence $\frac{d}{5}$; ainsi de suite. Donc il règne la même différence dans toutes les progressions partielles; donc, puisque de l'une à l'autre il y a un terme commun, on pourra les mettre bout à bout, et elles ne formeront plus qu'une seule et même progression.

161. Théorême IV. *La somme de tous les termes d'une progression arithmétique quelconque est égale à la moitié du produit du nombre des termes par la somme des extrêmes.*

Car soit une progression arithmétique quelconque, dont le premier terme $= f$; la différence additive ou soustractive $= d$; le nombre des termes $= n$; la somme s. Cette progression s'écrira ainsi :

$$\div f \,.\, f + d \,.\, f + 2d \,.\, f + 3d \,.\, f + 4d \ldots f + (n-1)\,d.$$

Ecrivons la même suite dans un ordre inverse :

$$\div f + (n-1)\,d \ldots f + 4d \,.\, f + 3d \,.\, f + 2d \,.\, f + d \,.\, f.$$

Puis ajoutons ensemble terme à terme ces deux progressions ; nous aurons une nouvelle suite, dont chaque terme est $2f + (n - 1)d$, somme des extrêmes de la progression proposée, et dont le nombre des termes est n. Donc la somme de cette suite $= n \times (2f + (n-1)d)$. Or, cette somme est évidemment le double de la progression proposée ; on aura donc $2s = n \times (2f + (n-1)d)$, ou $s = \frac{n(2f + (n-1)d)}{2}$; ce qui est l'énoncé du théorême.

162. Problême. *Connoissant dans une progression arithmétique trois de ces cinq choses, le premier terme, le dernier, la différence, le nombre des termes, la somme de tous les termes, trouver les deux autres.*

Nommons le premier terme. . . . . a,
le dernier . . . . u,
la différence additive ou soustractive. . . . . . . d,
le nombre des termes. . . . . n,
la somme de tous les termes. . . . . s ;

on aura (156 et 161) les deux équations :

$$(A)\ u = a + d(n - 1),$$

$$(B)\ s = (a + u) \times \frac{n}{2}.$$

Or, si parmi les cinq quantités a, u, d, n, s, qu'elles renferment, on en connoît trois, il s'agit de trouver les deux autres ; ce qui donne lieu aux questions suivantes :

I. *Connoissant* a, u, n, *trouver* s *et* d.

L'équation (B) donne tout de suite s, et on tire de l'équation (A), $d = \frac{u - a}{n - 1}$.

II. *Connoissant* a, d, n, *trouver* u *et* s.

L'équation (A) donne tout de suite u ; substituant cette valeur dans l'équation (B), on aura $s = \frac{(2a + dn - d)n}{2}$.

III. *Connoissant* u, d, n, *trouver* a *et* s.

L'équation (A) donne $a = u - dn + d$; substituant cette valeur dans l'équation (B), on aura $s = \frac{(2u - dn + d)n}{2}$.

IV. *Connoissant* a, u, d, *trouver* n *et* s.

L'équation (A) donne $n = \frac{u - a + d}{d}$; substituant cette valeur dans l'équation (B), on aura $s = \frac{(a+u)(u-a+d)}{2d}$.

V. *Connoissant* a, n, s, *trouver* u *et* d.

L'équation (B) donne $u = \frac{2s - an}{n}$; substituant cette valeur dans l'équation (A), et dégageant d, on aura $d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$.

VI. *Connôissant* u, n, s, *trouver* a *et* d.

L'équation (B) donne $a = \frac{2s - nu}{n}$; substituant cette valeur dans l'équation (A), on trouvera $d = \frac{2nu - 2s}{n(n-1)}$.

VII. *Connoissant* a, u, s, *trouver* n *et* d.

L'équation (B) donne $n = \frac{2s}{a+u}$; substituant cette valeur dans l'équation (A), on trouvera $d = \frac{(u+a).(u-a)}{2s-a-u}$.

VIII. *Connoissant* n, d, s, *trouver* u *et* a.

Mettons dans l'équation (B) pour u sa valeur tirée de l'équation (A), nous aurons $s = \frac{(2a + dn - d)n}{2}$; ce qui donne $a = \frac{2s - dn^2 + dn}{2n}$. Ensuite substituons cette valeur de a dans l'équation (A); et nous trouverons immédiatement $u = \frac{2s + dn^2 - dn}{2n}$.

IX. *Connoissant* a, d, s, *trouver* n *et* u.

Mettons dans l'équation (B) pour u sa valeur tirée de l'équation (A), nous aurons $s = \frac{(2a + dn - d)n}{2}$; d'où l'on tire $n^2 + \frac{(2a-d)n}{d} - \frac{2s}{d} = 0$; équation qui est du second degré, et que nous apprendrons à résoudre (chap.

Il est clair que la valeur de n étant trouvée, on aura celle de u par l'équation (A).

X. *Connoissant* u, d, s, *trouver* n *et* a.

L'équation (A) donne $a=u-dn+d$; substituant cette valeur dans l'équation (B), on aura $s=\frac{(2u-dn+d)n}{2}$; ce qui donne $n^2-\frac{(2u+d)n}{d}+\frac{2s}{d}=0$; équation du second degré, laquelle se rapporte par conséquent encore au chapitre XIII. La valeur de n étant trouvée, on aura celle de a par l'équation $a=u-dn+d$.

Nos lecteurs pourront s'exercer à faire des applications numériques de ces formules.

SECTION II.

Des proportions et progressions géométriques.

163. Nous avons déja démontré, dans l'Arithmétique, quelques propositions concernant les proportions géométriques; nous les démontrerons encore ici d'une manière générale, pour comprendre toute cette théorie en un même corps.

164. Théorème I. *Dans toute proportion géométrique* a:b::c:d, *le produit* ad *des extrêmes est ègal au produit* bc *des moyens.*

Car soit $\frac{1}{r}$ la raison de la proportion, ou le quotient d'un antécédent divisé par son conséquent (1); on aura, par la nature de la proportion, $b=ar$, $d=cr$. Donc la

(1) On pourroit prendre aussi pour *raison* le quotient du conséquent divisé par l'antécédent; mais l'acception la plus ordinaire de ce mot est celle que j'adopte ici, et que je conserverai toujours dans la suite. Je n'ai pas besoin de faire observer que toute fraction $\frac{M}{N}$ peut être réduite à la forme $\frac{1}{r}$; car il ne faut pour cela que diviser haut et bas par M, et supposer $\frac{N}{M}=r$.

proportion peut être écrite ainsi, $a:ar::c:cr$; et alors on voit que le produit des extrêmes et celui des moyens sont composés de facteurs identiques.

En nombres, si on a, $2:8::3:12$, on aura, $2\times 12=8\times 3$.

165. *Corollaire I.* Il peut arriver que l'un des termes de la proportion soit l'unité; et alors l'un des deux produits, qui sont toujours égaux, se réduit à un seul extrême, ou à un seul moyen.

166. *Corollaire II.* Dans la proportion *continue*, $a:b::b:c$, où les moyens sont égaux, et qu'on écrit ainsi : $\div a:b:c$, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen b.

167. Théorême II. *Réciproquement, lorsque quatre termes* a, b, c, d, *sont tels que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, ces quatre termes forment une proportion géométrique.*

Car, puisque $ad=bc$, on aura (en divisant tout par bd), $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; d'où résulte la proportion $a:b::c:d$.

168. *Scholie.* Si dans une proportion géométrique on connoît les deux moyens et un extrême, on aura l'extrême inconnu, en divisant le produit des moyens par l'extrême connu; si l'on connoît les deux extrêmes et un moyen, on aura le moyen inconnu, en divisant le produit des extrêmes par le moyen connu.

169. *Remarque.* Si dans la suite a, b, c, d, on avoit $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, on auroit (en multipliant tout par bd), $ad>bc$. Et réciproquement, si on avoit $ad>bc$, on auroit (en divisant tout par bd), $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

170. Théorème III. *Si on a la proportion*, $a : b :: c : d$; *les arrangements suivants* (auxquels on donne les noms écrits ici à côté d'eux) *forment encore des proportions.*

I.	$a : c :: b : d$	*alternando.*
II.	$d : b :: c : a$	*invertendo.*
III.	$b : a :: d : c$	
IV.	$c : a :: d : b$	
V.	$a + b : a :: c + d : c$	*componendo.*
VI.	$a + b : b :: c + d : d$	
VII.	$a - b : a :: c - d : c$	*detrahendo.*
VIII.	$a - b : b :: c - d : d$	
IX.	$a + c : b + d :: a : b :: c : d$	Somme ou différence des antécédents : somme ou différence des conséquents :: antécédent : conséquent.
X.	$a - c . b - d :: a : b :: c : d$	

On verra que tous ces arrangements forment des proportions, en nommant $\frac{1}{r}$ la raison de la proportion fondamentale $a : b :: c : d$; mettant ar pour b, cr pour d, et observant que dans chacun d'eux le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

171. Théorème IV. *Si on a la suite des rapports égaux* (1),

$$a : b :: c : d :: e : f :: g : h :: i : k,$$

on en pourra conclure les proportions suivantes.

I. *La somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents, comme un antécédent est à son conséquent.*

(1) On doit prendre garde à ne pas confondre en général une suite de rapports égaux avec une progression. Pour que des rapports soient égaux, il suffit qu'en divisant semblablement les deux termes de chaque rapport l'un par l'autre, tous les quotients soient égaux entre eux; mais pour qu'une suite de termes forme une progression, il faut de plus que le conséquent du premier rapport serve d'antécédent au second, que le conséquent du second serve d'antécédent au troisième; ainsi de suite. D'où l'on voit que toute progression est une suite de rapports égaux; mais que toute suite de rapports égaux n'est pas une progression.

II. *La somme d'un nombre quelconque d'antécédents est à la somme d'un pareil nombre de conséquents correspondants, comme un antécédent est à son conséquent, ou comme une autre somme d'antécédents est à une somme pareille de conséquents correspondants.*

En effet, 1.° on a d'abord, par l'article précédent, $a+c:b+d :: a:b :: c:d$; ou (à cause de $c:d :: e:f$),

$$a+c:b+d :: e:f;$$

ce qui donne de même, $a+c+e:b+d+f :: e:f$;

ou (à cause de $e:f :: g:h$),

$$a+c+e:b+d+f :: g:h;$$

ce qui donne $a+c+e+g:b+d+f+h :: g:h$,

ou (à cause de $g:h :: i:k$),

$$a+c+e+g:b+d+f+h :: i:k;$$

ce qui donne $a+c+e+g+i:b+d+f+h+k :: i:k :: g:h :: e:f :: c:d :: a:b$.

2.° On a, $a+c+e:b+d+f :: e:f$, et $a+c+e+g:b+d+f+h :: g:h :: e:f$; donc $a+c+e:b+d+f :: a+c+e+g:b+d+f+h$.

On trouvera de même les proportions suivantes, et autres semblables,

$$c+e+g:d+f+h :: a:b;$$

$$c+e+g:d+f+h :: a+c+e+g+i:b+d+f+h+k.$$

172. *Remarque.* Nous ferons en passant une remarque qui regarde la manière d'écrire les suites de rapports égaux. Au lieu de séparer les deux termes d'un rapport par deux points, et deux rapports consécutifs par quatre points, comme on l'a fait pour la suite $a:b :: c:d :: e:f :: g:h :: i:k$, il est un peu plus commode d'écrire d'abord tous les antécédents, ensuite tous les conséquents, de séparer les termes de chacune de ces deux suites les uns des autres par deux points, et la suite des antécédents de celle des conséquents par quatre points de la manière suivante : $a:c:e:g:i :: b:d:f:h:k$. Par ce moyen les antécédents et les conséquents ne sont pas mêlés ensemble, et on prend plus facilement les sommes d'antécédents et de conséquents

173. Théorème V. *Si dans une proportion* $a:b::c:d$, *on multiplie ou on divise, par un même nombre* m, *ou les deux termes d'un même rapport, ou les deux antécédents, ou les deux conséquents: on aura encore, dans tous les cas, une proportion; c'est-à-dire que les suites qu'on voit ici forment des proportions.*

$am : bm :: c : d$	$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: c : d$
$a : b :: cm : dm$	$a : b :: \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$
$am : b :: cm : d$	$\frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d$
$a : bm :: c : dm$	$a : \frac{b}{m} :: c : \frac{d}{m}$.

Car dans chacune de ces huit suites le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, comme on le verra en nommant $\frac{1}{r}$ la raison de la proportion fondamentale, $a:b::c:d$, et substituant ar pour b, cr pour d.

174. Théor. VI. *Si on a un nombre quelconque de proportions, comme celles qu'on voit ici, les suites qu'on formera (et qui sont écrites ici à côté), en les multipliant ou en les divisant terme à terme, seront encore des proportions.*

$a : b :: c : d$
$e : f :: g : h$
$i : k :: l : m$
etc.

$ae : bf :: cg : dh$
$aei : bfk :: cgl : dhm$
$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} :: \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$
$\frac{a}{ei} : \frac{b}{fk} :: \frac{c}{gl} : \frac{d}{hm}$
etc.

Car soient $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, etc. les raisons des proportions fondamentales; en mettant aq pour b, cq pour d; er pour f, gr pour h; is pour k; ls pour m; on verra que dans chacune des nouvelles suites le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, et que par conséquent ces suites forment des proportions géométriques.

Le rapport qui règne dans une proportion résultante de la multiplication d'un nombre quelconque de proportions, s'appelle *rapport composé* des rapports de ces proportions.

175. *Corollaire*. Lorsque quatre grandeurs sont en proportion, leurs quarrés, leurs cubes, et en général leurs puissances semblables, sont aussi en proportion; car on peut supposer dans le théorême précédent que les proportions fondamentales sont la même écrite tant de fois qu'on voudra; et alors, par la multiplication successive et terme à terme de ces proportions identiques, il résultera les quarrés, les cubes, et en général les puissances semblables des termes de l'une d'entre elles, lesquelles puissances formeront des proportions. Et réciproquement, si des puissances quelconques forment des proportions, leurs racines formeront aussi des proportions, car si on a, $a^n : b^n :: c^n : d^n$, on aura $a^n \times d^n = b^n \times c^n$: donc, en tirant la racine n de chaque membre, on aura $ad = bc$; ce qui donne $a : b :: c : d$.

L'usage est de dire que la raison des quarrés est *doublée* de celle des racines quarrées; que la raison des cubes est *triplée* de celle des racines cubes, etc. Sur quoi il faut observer qu'on appelle encore raison *doublée*, ou *triplée*, ou etc. la raison qui règne dans la proportion résultante de la multiplication de deux, de trois proportions qui ont la même raison, sans que néanmoins ces proportions soient les mêmes; par exemple, si on a les proportions qu'on voit ici, et dont la raison commune est 2, la

$4:2 :: 6:3$,

$10:5 :: 16:8$,

$14:7 :: 18:9$,

raison de la première proportion composée $4 \times 10 : 2 \times 5 :: 6 \times 16 : 3 \times 8$, sera dite *doublée* de la raison 2; la raison de la seconde proportion, composée $4 \times 10 \times 14 : 2 \times 5 \times 7 :: 6 \times 16 \times 18 : 3 \times 8 \times 9$, sera dite *triplée* de la raison 2; ainsi de suite. Il est clair en effet que la raison de la première ou de la seconde proportion composée est la même que la raison qui régneroit entre les quarrés ou entre les cubes des termes de chacune des proportions composantes, puisqu'on a $\frac{4}{2}$ ou $\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$ qu $\frac{16}{8}$ ou $\frac{14}{7}$ ou $\frac{18}{9}$.

176. Théorème VII. *Si l'on a un nombre quelconque de proportions telles que les conséquents de la première servent d'antécédents à la seconde, les conséquents de la seconde d'antécédents à la troisième, ainsi de suite; les antécédents de la première et les conséquents de la dernière formeront une proportion, c'est-à-dire, qu'on aura*, a:g :: c:h.

$a:b::c:d$,
$b:e::d:f$,
$e:g::f:h$,
etc.

Car on a (174) $abe:beg::cdf:dfh$. Divisant les deux termes du premier rapport par be, et les deux termes du second rapport par df, on aura encore (173) la proportion $a:g::c:h$.

177. Théorème VIII. *Dans toute progression géométrique*

$$\div\div a : b : c : d : e : f : g : h : i : k$$

un terme quelconque est égal à un autre divisé par la raison de la progression, élevée à une puissance désignée par le nombre de termes compris depuis l'un inclusivement jusqu'à l'autre exclusivement.

Car soit $\frac{1}{r}$ la raison de la progression; on aura $b=ar$, $c=br=ar^2$, $d=cr=ar^3$, etc. Donc la progression pourra être écrite ainsi $\div\div a:ar:ar^2:ar^3:ar^4:$etc. Alors on voit, par exemple, que le cinquième terme ar^4 est égal au premier divisé par la quatrième puissance $\frac{1}{r^4}$ de $\frac{1}{r}$; que le septième terme ar^6 est égal au second ar divisé par la cinquième puissance $\frac{1}{r^5}$ de $\frac{1}{r}$.

178. *Corollaire I.* Il suit de là que, connoissant seulement un terme d'une progression, et la raison, on pourra former cette progression, soit qu'elle doive descendre, ou qu'elle doive monter, puisqu'il ne faudra pour cela que diviser le terme donné par les puissances successives de la raison.

179. *Corollaire II.* Si dans une progression on prend quatre termes, tels qu'il y en ait autant entre le premier et le second, entre le troisième et le quatrième; ces quatre termes formeront une proportion géométrique, puisque

la raison des deux premiers et celle des deux derniers sont la même puissance de la raison de la progression. Et comme dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, on voit encore que le produit des extrêmes de quatre termes, pris à intervalles égaux dans une progression géométrique, est égal au produit des moyens.

180. *Corollaire III.* Si entre deux termes a, u, on veut insérer un nombre n de moyens proportionnels géométriques, on voit que la question est de former une progression géométrique dont le nombre de termes est $n+2$. Or, en nommant $\frac{1}{r}$ la raison inconnue de cette progression, on aura $u = ar^{n+1}$; ce qui donne $r^{n+1} = \frac{u}{a}$, et, (en tirant la racine $n+1$ de chaque membre), $r = \sqrt[n+1]{\frac{u}{a}}$. Donc $\frac{1}{r} = \sqrt[n+1]{\frac{a}{u}}$. La raison $\frac{1}{r}$ sera donc connue. Ainsi on peut (178) déterminer tous les termes de la progression.

181. *Corollaire IV.* Si entre tous les termes d'une progression géométrique $\div a:b:c:d:e:f:$ etc. on insère un même nombre de moyens proportionnels géométriques, la nouvelle suite qu'on formera sera encore une progression géométrique. Car soit n le nombre de moyens proportionnels géométriques insérés entre a et b, entre b et c, entre c et d, etc., la raison de la première progression partielle sera (art. préc.) $\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}$; celle de la seconde, $\sqrt[n+1]{\frac{b}{c}}$; celle de la troisième, $\sqrt[n+1]{\frac{c}{d}}$, etc. Or, par la nature de la progression fondamentale, on a $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$; donc il règne la même raison dans toutes les progressions partielles; et comme le dernier terme de la première est le premier terme de la seconde, que le dernier terme de la seconde est le premier terme de la troisième, ainsi de suite;

il est évident que toutes ces progressions mises bout à bout formeront une seule et même progression.

182. Théorème IX. *Toute progression géométrique*

$$\div a : b : c : d : e : f : g : h$$

donne ces proportions : le quarré du premier terme est au quarré du second comme le premier est au troisième : le cube du premier terme est au cube du second comme le premier est au quatrième ; et en général les puissances semblables des deux premiers termes sont entre elles, comme le premier terme et le terme dont le numéro est l'exposant des puissances des deux premiers, augmenté de l'unité.

Car, soit n l'exposant commun des puissances des deux premiers termes, et mettons la progression proposée sous cette forme, $\div a:ar:ar^2:ar^3:ar^4:ar^5$:etc.; on verra que $a^n: a^n r^n :: a:ar^n$ (puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens). Or, le numéro du dernier terme ar^n est évidemment $n+1$; donc, etc.

183. Théorème X. *Toute progression géométrique*

$$\div a : b : c : d : e : f : g : h : i : k$$

donne cette proportion : le premier terme est au second, comme la somme de tous les termes moins le dernier est à la somme de tous les termes moins le premier; c'est-à-dire (en nommant s la somme totale des termes), $a : b :: s-k : s-a$.

En effet, une progression géométrique étant une suite de rapports égaux dont tous les termes sont antécédents, excepté le dernier, et tous les termes sont conséquents, excepté le premier, on a (171), $a:b::s-k:s-a$.

184. *Corollaire I.* Donc, en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens de cette dernière proportion, on aura $as-aa=bs-bk$; d'où l'on tire $s=\frac{aa-bk}{a-b}$, expression de la somme de la progression par le moyen du premier terme, du second et du dernier.

185. *Corollaire II.* Si l'on nomme $\frac{1}{r}$ la raison de la pro-

gression, et qu'on substitue ar pour b dans la valeur de s, on trouvera $s = \frac{a - kr}{1 - r}$.

186. *Corollaire III.* Lorsque la progression va en décroissant jusqu'à l'infini (1), alors son dernier terme peut être regardé comme nul par rapport au premier, et on a simplement $s = \frac{a}{1 - r}$.

---

(1) Nous allons fixer à ce sujet, d'une manière plus précise que nous n'avons pu le faire dans les notions générales qui précèdent immédiatement le traité d'arithmétique, les idées qu'on doit se former en mathématiques de la grandeur *infinie* et de la grandeur *infiniment petite*.

Toute la doctrine des mathématiques consiste à comparer ensemble plusieurs grandeurs de la même espèce. Soit donc $\frac{M + m}{N}$ un rapport géométrique quelconque, ou le quotient de la grandeur $(M + m)$ divisée par la grandeur N de même nature. Il est clair que si, les quantités m et N demeurant toujours les mêmes, on suppose que M augmente continuellement, le rapport $\frac{M + m}{N}$ approchera continuellement du rapport $\frac{M}{N}$; car, par exemple, les deux rapports $\frac{100 + 2}{5}$, $\frac{100}{5}$, approchent plus d'être égaux que les deux rapports $\frac{10 + 2}{5}$, $\frac{10}{5}$; ou, ce qui revient au même, la fraction $\frac{102}{100}$ approche plus de l'unité que la fraction $\frac{12}{10}$ ou $\frac{120}{100}$. Or, rien ne limite l'accroissement de M : on peut donc supposer que cet accroissement devienne tel que la différence des deux rapports $\frac{M + m}{N}$, $\frac{M}{N}$, devienne moindre que toute quantité finie déterminable; d'où il résulte que cette différence devra être regardée comme nulle par rapport à toutes les quantités finies qui entrent dans le calcul, puisqu'elle n'a avec ces quantités aucun rapport assignable : alors on dit que la grandeur M est *infinie*, et on néglige m en comparaison de M dans l'expression $\frac{M + m}{N}$; les autres quantités finies qui entrent dans le calcul doivent aussi être regardées comme nulles par rapport à M. Semblablement, si, M et N demeurant constantes et finies, la grandeur m diminue continuellement jusqu'à devenir moindre que t

187. Probléme. *Connoissant dans une progression géométrique trois de ces cinq choses, le premier terme, le dernier, la raison, le nombre des termes, la somme de tous les termes, trouver les deux autres.*

Nommons le premier terme. . . . . a,
le dernier. . . . . u,
la raison. . . . . $\frac{1}{r}$,
le nombre des termes. . . . . n,
la somme de tous les termes. . . . . s;

on aura (177 et 185) les deux équations

$$(A)\quad u = ar^{n-1},$$

$$(B)\quad s = \frac{a-ur}{1-r}.$$

Maintenant, étant données trois des cinq quantités a, u, $\frac{1}{r}$, n, s, il s'agit de trouver les deux autres; d'où résultent les questions suivantes.

I. *Connoissant* a, u, n, *trouver* $\frac{1}{r}$ *et* s.

L'équation (A) donne (en divisant tout par a et tirant la racine $n-1$ de chaque membre), $r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. On connoîtra donc aussi $\frac{1}{r}$. Substituant la valeur de r dans l'équation (B), on aura la valeur de s en grandeurs toutes connues.

II. *Connoissant* a, $\frac{1}{r}$, n, *trouver* u *et* s.

On a d'abord immédiatement u par l'équation (A). Subs-

---

quantité finie déterminable, le rapport $\frac{M+m}{N}$ pourra être regardé comme égal au rapport $\frac{M}{N}$, puisque la différence de ces deux rapports est inassignable : alors on dit que la grandeur m est *infiniment petite*, et on la néglige par rapport aux quantités finies qui entrent dans le calcul.

tituant pour u sa valeur dans l'équation (B), on aura $s = \frac{a - ar^n}{1 - r}$.

III. *Connoissant* u, $\frac{1}{r}$, n, *trouver* a *et* s.

L'équation (A) donne $a = \frac{u}{r^{n-1}}$. Substituant cette valeur dans l'équation (B), on trouvera $s = \frac{u - ur^n}{(1 - r) r^{n-1}}$.

IV. *Connoissant* a, u, $\frac{1}{r}$, *trouver* s *et* n.

On a d'abord immédiatement s par l'équation (B). A l'égard de l'autre inconnue n, qu'il faudroit tirer de l'équation (A), on n'a pas de moyen direct pour la déterminer; mais on verra qu'elle se trouve facilement par les principes du chapitre suivant.

V. *Connoissant* a, u, s, *trouver* $\frac{1}{r}$, *et* n.

L'équation (B) donne $\frac{1}{r} = \frac{s - u}{s - a}$; on connoîtra donc $\frac{1}{r}$. On tirera n de l'équation (A) par le moyen du chapitre suivant.

VI. *Connoissant* n, $\frac{1}{r}$, s, *trouver* a *et* u.

L'équation (B) donne $u = \frac{a + rs - s}{r}$. Substituant cette valeur dans l'équation (A), on aura $\frac{a + rs - s}{r} = ar^{n-1}$; d'où l'on tire $a = \frac{s - rs}{1 - r^n}$.

VII. *Connoissant* a, $\frac{1}{r}$, s, *trouver* u *et* n.

L'équation (B) donne $u = \frac{a + rs - s}{r}$. On substituera cette valeur dans l'équation (A); et on trouvera n par le chapitre suivant.

VIII. *Connoissant* u, $\frac{1}{r}$, s, *trouver* a *et* n.

L'équation (B) donne $a = s - rs + ur$. On substit

cette valeur dans l'équation (A), et on trouvera n par le chapitre suivant.

IX. *Connoissant* a, n, s, *trouver* $\frac{1}{r}$ *et* u.

L'équation (B) donne $u = \frac{a + rs - s}{r}$. Substituant cette valeur dans l'équation (A), on aura $\frac{a + rs - s}{r} = ar^{n-1}$, ou $ar^n - a - rs + s = 0$: équation du degré n, qu'on ne sait pas résoudre en général. Il est clair que si l'on connoissoit r, on auroit u par l'équation $u = \frac{a + rs - s}{r}$.

X. *Connoissant* u, n, s, *trouver* $\frac{1}{r}$ *et* a.

En mettant dans l'équation (B) pour a sa valeur $\frac{u}{r^{n-1}}$ tirée de l'équation (A), on aura $s = \frac{u - ur^n}{(1-r)\, r^{n-1}}$, ou $ur^n + s(1-r)\, r^{n-1} - u = 0$; équation qui est encore du degré n. Si l'on connoissoit r, on auroit a par l'équation (A).

Je laisse aux lecteurs le soin d'appliquer toute cette théorie générale des proportions et progressions à des exemples numériques.

CHAPITRE XI.

Des Logarithmes.

188. On donne ordinairement dans l'Arithmétique la théorie des logarithmes; mais j'ai cru devoir la renvoyer ici, parce qu'elle emprunte aujourd'hui de l'Algèbre les moyens les plus simples de vérifier et d'étendre les tables qui en sont l'objet final. Seulement, je commencerai par exposer, sans aucun secours des caractères algébriques, la partie immédiatement dépendante des calculs arithmétiques; ensuite je montrerai l'usage de l'Algèbre pour simplifier et généraliser les opérations relatives à la construction des tables.

189. Cette théorie est fondée sur la correspondance remarquable qui existe entre la proportion arithmétique et la proportion géométrique, de même qu'entre la progression arithmétique et la progression géométrique. En effet, dans la proportion arithmétique, on a l'un des extrêmes, ou des moyens, en retranchant de la somme des moyens, ou de la somme des extrêmes, l'autre extrême, ou l'autre moyen : dans la proportion géométrique on a l'un des extrêmes, ou des moyens, en divisant le produit des extrêmes, ou celui des moyens, par l'autre extrême, ou par l'autre moyen. Pareillement, dans la progression arithmétique, un terme quelconque est égal au premier plus la différence additive ou soustractive, répétée autant de fois qu'il y a de termes depuis l'un jusqu'à l'autre : dans la progression géométrique, un terme quelconque est égal au premier multiplié ou divisé par la fraction qui a pour numérateur le conséquent d'un rapport, et pour dénominateur l'antécédent, autant de fois qu'il y a de termes depuis l'un jusqu'à l'autre. D'où l'on voit que les proportions et progressions arithmétiques emploient l'addition et la soustraction dans les mêmes circonstances où les proportions et progressions géométriques emploient la multiplication et la division.

190. Frappé de cette analogie, et considérant d'un autre côté que la multiplication et la division sont des opérations beaucoup plus longues que l'addition et la soustraction, le baron de Neper, écossois, qui fleurissoit au commencement du siècle dernier, imagina de substituer aux nombres en progression ou proportion géométrique d'autres nombres en progression ou proportion arithmétique, et de réduire par ce moyen les principales opérations de l'arithmétique à de simples additions et soustractions : idée très-ingénieuse, qui rend des services immortels à toutes les sciences mathématiques, principalement à l'astronomie. Les derniers nombres s'appellent les *logarithmes* des premiers.

191. Soient donc, par exemple, les deux progressions qu'on voit ici,

l'une arithmétique, $\div$ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . etc.
l'autre géométrique, $\div\!\div$ 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972 : etc.

Chaque terme de la suite supérieure est le *logarithme* du terme correspondant de la suite inférieure. Et si, dans chacune de ces deux suites, on prend quatre termes qui se correspondent chacun à chacun, et qui soient tels qu'il y en ait autant entre le premier et le second qu'entre le troisième et le quatrième, on aura (158 et 179) deux proportions, l'une arithmétique, l'autre géométrique. Toutes les opérations dont les termes de la suite inférieure sont susceptibles par voie de multiplication et de division, on pourra les faire sur ceux de la première, par voie d'addition et de soustraction. C'est sur ce principe qu'on a dressé des tables, qui contiennent les termes d'une progression géométrique poussée plus ou moins loin, avec les logarithmes qui leur correspondent : on appelle ordinairement ces tables *tables de logarithmes*.

192. Il est clair que le choix de la progression géométrique, et celui de la progression arithmétique correspondante, sont également arbitraires. Mais, dans les tables ordinaires, on a pris pour la progression géométrique la progression décuple $\div\!\div$ 1:10:100:1000:etc., parce qu'elle sert de fondement à la numération; et pour la progression des logarithmes la progression arithmétique des nombres naturels $\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . etc., parce qu'elle est la plus simple de toutes les progressions arithmétiques.

Les termes de la première de ces progressions peuvent être regardés comme les puissances successives entières du nombre fondamental 10; car $1=(10)^0$; $10=(10)^1$; $100=(10)^2$; $1000=(10)^3$; $10000=(10)^4$; etc.; et les termes de la seconde progression comme les exposants successifs du nombre fondamental 10.

193. On voit qu'on a d'abord immédiatement les loga-

rithmes de tous les nombres compris dans la progression géométrique, puisque ces logarithmes ne sont autre chose que les termes correspondants de la progression arithmétique. Mais entre les deux premiers termes 1 et 10 de la progression géométrique il y a les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; entre le second terme 10 et le troisième 100 il y a les nombres 11, 12, 13, 14, etc.; entre le troisième 100 et le quatrième 1000 il y a les nombres 101, 102, 103, etc.; ainsi de suite. Il s'agit donc de trouver les logarithmes de ces nombres intermédiaires pour pouvoir les insérer dans les tables. C'est à quoi les premiers calculateurs de ces sortes de tables sont parvenus à peu près comme il suit.

194. Imaginons qu'entre tous les termes de la progression géométrique on insère un même nombre (qui soit très-grand) de moyens proportionnels géométriques, et entre tous les termes de la progression arithmétique pareil nombre de moyens proportionnels arithmétiques, qui correspondront chacun à chacun des premiers; on aura (181 et 160) deux nouvelles progressions correspondantes chacune à chacune. Je suppose, pour fixer les idées, que deux termes consécutifs de chaque progression sont les extrêmes d'une autre progression qui a 10000000 termes. Il est évident 1.° que, dans la progression géométrique, l'intervalle de 1 à 10 étant rempli par un si grand nombre de moyens proportionnels, il s'en trouvera parmi eux qui seront égaux, du moins à peu près, aux nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ainsi on pourra prendre pour logarithmes de ces derniers nombres les termes de la progression arithmétique qui répondent à ceux de la progression géométrique à la place desquels on les substitue.

2.° Le même raisonnement s'applique aux nombres compris dans les intervalles de 10 à 100, de 100 à 1000, etc. Par conséquent on aura les logarithmes, exacts ou approchés, de tous les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc., et on pourra en dresser des tables. Ces tables ne contiennent que les nombres proposés et leurs logarithmes : on n'y fait pas entrer les autres moyens propor-

tionnels géométriques et arithmétiques, afin d'éviter une prolixité qui seroit d'ailleurs inutile; car nous verrons ci-dessous qu'avec les logarithmes des nombres compris dans les tables, on peut déterminer le logarithme de tout autre nombre qui n'y est pas compris.

195. Les calculs des logarithmes s'abrègent par la méthode suivante, qui revient dans le fond à celle que je viens d'indiquer, mais qui va d'ailleurs directement aux termes dont on a besoin, sans faire d'autres opérations que celles qui sont absolument indispensables. Expliquons-la sur un exemple.

Je suppose qu'on veuille calculer le logarithme du nombre 3, qui est compris entre les deux premiers termes 1 et 10 de la progression géométrique fondamentale.

1.° Considérons 1 et 10 comme les extrêmes d'une proportion géométrique continue, et les logarithmes correspondants 0 et 1 comme les extrêmes d'une proportion arithmétique continue correspondante. On aura (166) le moyen proportionnel géométrique, en tirant la racine quarrée du produit 1×10, ou 10, et (153) le moyen proportionnel arithmétique, en prenant la moitié de la somme de 0 et de 1. Or, si l'on pousse l'extraction de la racine jusqu'au huitième chiffre décimal, on trouve que le moyen proportionnel géométrique approché est 3,16227766; et d'un autre côté le moyen arithmétique entre 0 et 1 est $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1,0}{2}$, ou 0,5. Cette première opération donne un moyen proportionnel géométrique plus grand que 3. Le nombre 3 est donc compris entre 1 et ce premier moyen proportionnel; et le logarithme de 3 est compris entre 0 et 0,5.

2.° Considérons 1 et le premier moyen proportionnel géométrique 3,16227766, comme les extrêmes d'une proportion géométrique continue; et leurs logarithmes 0 et 0,5 comme les extrêmes d'une proportion arithmétique continue correspondante. On trouvera que le moyen proportionnel géométrique est 1,77827941, et que le moyen proportionnel arithmétique est $\frac{0,5}{2}$, ou $\frac{0,50}{2}$, ou 0,25. On voit

que le second moyen proportionnel géométrique est plus petit que 3 ; par conséquent le nombre 3 est compris entre les deux premiers moyens proportionnels géométriques ; et le logarithme de 3 est compris entre 0,25 et 0,50, qui sont les deux moyens proportionnels arithmétiques correspondants.

3.° Considérons les deux moyens proportionnels géométriques 1,77827941 et 3,16227766, comme les extrêmes d'une proportion géométrique continue, et leurs logarithmes 0,25 et 0,5, comme les extrêmes d'une proportion arithmétique continue correspondante. On trouve pour troisième moyen proportionnel géométrique le nombre 2,37137370, et pour son logarithme le nombre 0,375. D'où l'on voit que le nombre 3 est plus grand que le troisième moyen proportionnel géométrique, et que son logarithme est par conséquent aussi plus grand que le troisième moyen proportionnel arithmétique correspondant.

On continuera ainsi de suite de prendre un nouveau moyen proportionnel géométrique entre deux nombres, dont l'un est plus grand, l'autre plus petit que 3, et on prendra en même temps le moyen proportionnel arithmétique correspondant. Par là on approchera continuellement du nombre 3; et, à la vingt-sixième opération, on obtiendra un nombre qui ne diffère pas du nombre 3 d'une unité décimale du septième ordre. Le logarithme de ce nombre pourra donc être regardé sensiblement comme celui de 3.

Les logarithmes des autres nombres intermédiaires à ceux de la progression géométrique ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : etc., pourront être calculés de la même manière.

Il est à propos d'observer qu'après avoir calculé les logarithmes des nombres *premiers* 3, 5, 7, 11, 13, etc., les logarithmes des nombres *composés* se trouvent par les simples additions des logarithmes de leurs facteurs, comme on le verra ci-dessous.

196. Je joins ici une petite table qui contient les nombres depuis 1 jusqu'à 210 avec leurs logarithmes correspondants.

Nomb.	Logarithmes.	Nomb	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
1	0,0000000	31	1,4913617	61	1,7853298
2	0,3010300	32	1,5051500	62	1,7923917
3	0,4771213	33	1,5185139	63	1,7993405
4	0,6020600	34	1,5314789	64	1,8061800
5	0,6989700	35	1,5440680	65	1,8129134
6	0,7781513	36	1,5563025	66	1,8195439
7	0,8450980	37	1,5682017	67	1,8260748
8	0,9030900	38	1,5797836	68	1,8325089
9	0,9542425	39	1,5910646	69	1,8388491
10	1,0000000	40	1,6020600	70	1,8450980
11	1,0413927	41	1,6127839	71	1,8512583
12	1,0791812	42	1,6232493	72	1,8573325
13	1,1139434	43	1,6334685	73	1,8633229
14	1,1461280	44	1,6434527	74	1,8692317
15	1,1760913	45	1,6532125	75	1,8750613
16	1,2041200	46	1,6627578	76	1,8808136
17	1,2304489	47	1,6720979	77	1,8864907
18	1,2552725	48	1,6812412	78	1,8920946
19	1,2787536	49	1,6901961	79	1,8976271
20	1,3010300	50	1,6989700	80	1,9030900
21	1,3222193	51	1,7075702	81	1,9084850
22	1,3424227	52	1,7160033	82	1,9138139
23	1,3617278	53	1,7242759	83	1,9190781
24	1,3802112	54	1,7323938	84	1,9242793
25	1,3979400	55	1,7403627	85	1,9294189
26	1,4149733	56	1,7481880	86	1,9344985
27	1,4313638	57	1,7558749	87	1,9395193
28	1,4471580	58	1,7634280	88	1,9444827
29	1,4623980	59	1,7708520	89	1,9493900
30	1,4771213	60	1,7781513	90	1,9542425

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
91	1,9590414	121	2,0827854	151	2,1789769
92	1,9637878	122	2,0863598	152	2,1818436
93	1,9684829	123	2,0899051	153	2,1846914
94	1,9731279	124	2,0934217	154	2,1875207
95	1,9777236	125	2,0969100	155	2,1903317
96	1,9822712	126	2,1003705	156	2,1931246
97	1,9867717	127	2,1038037	157	2,1958997
98	1,9912261	128	2,1072100	158	2,1986571
99	1,9956352	129	2,1105897	159	2,2013971
100	2,0000000	130	2,1139434	160	2,2041200
101	2,0043214	131	2,1172713	161	2,2068259
102	2,0086002	132	2,1205739	162	2,2095150
103	2,0128372	133	2,1238516	163	2,2121876
104	2,0170333	134	2,1271048	164	2,2148438
105	2,0211893	135	2,1303338	165	2,2174839
106	2,0253059	136	2,1335389	166	2,2201081
107	2,0293838	137	2,1367206	167	2,2227165
108	2,0334238	138	2,1398791	168	2,2253093
109	2,0374265	139	2,1430148	169	2,2278867
110	2,0413927	140	2,1461280	170	2,2304489
111	2,0453230	141	2,1492191	171	2,2329961
112	2,0492180	142	2,1522883	172	2,2355284
113	2,0530784	143	2,1553360	173	2,2380461
114	2,0569049	144	2,1583625	174	2,2405492
115	2,0606978	145	2,1613680	175	2,2430380
116	2,0644580	146	2,1643529	176	2,2455127
117	2,0681859	147	2,1673173	177	2,2479733
118	2,0718820	148	2,1702617	178	2,2504200
119	2,0755470	149	2,1731863	179	2,2528530
120	2,0791812	150	2,1760913	180	2,2552725

Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.	Nomb.	Logarithmes.
181	2,2576786	191	2,2810334	201	2,3031961
182	2,2600714	192	2,2833012	202	2,3053514
183	2,2624511	193	2,2855573	203	2,3074960
184	2,2648178	194	2,2878017	204	2,3096302
185	2,2671717	195	2,2900346	205	2,3117539
186	2,2695129	196	2,2922561	206	2,3138672
187	2,2718416	197	2,2944662	207	2,3159703
188	2,2741578	198	2,2966652	208	2,3180633
189	2,2764618	199	2,2988531	209	2,3201463
190	2,2787536	200	2,3010300	210	2,3222193

197. La table précédente n'est qu'un commencement; celles dont on fait usage sont poussées beaucoup plus loin. Il y en a qui contiennent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 10000 : telles sont les tables portatives que La Caille a fait imprimer en petit *in*-8°. On en trouve qui donnent les logarithmes des nombres jusqu'à 20000. D'autres plus étendues contiennent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 100000, et même jusqu'à 102000 : telles sont les grandes tables d'Ulacq, *in-folio*, et celles de Gardiner, grand *in*-4.°; les unes et les autres sont recommandables par leur exactitude. Celles d'Ulacq donnent les logarithmes avec dix chiffres décimaux; mais on ne les trouve plus que difficilement, et elles coûtent fort cher. Celles de Gardiner sont très-commodes; on y trouve expressément les logarithmes des nombres qui n'ont pas plus de cinq chiffres, et sans beaucoup de peine les logarithmes des nombres qui ont six ou sept chiffres et au-delà; d'ailleurs elles sont devenues fort communes depuis la nouvelle édition qui en a été donnée à Avignon en 1770, par les soins de Dumas et de Pezenas, avec des additions très-utiles.

Les no[illegible] tables de Callet, que le C. Firmin Didot

a fait imprimer avec un goût et un désintéressement qui méritent la reconnoissance publique, ne laissent rien à desirer. On y trouve les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000; les logarithmes des sinus et tangentes de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés, de dix secondes en dix secondes pour tous les degrés du quart de cercle; et, suivant la nouvelle division centésimale, de dix-millième en dix-millième. Elles sont précédées d'un discours sur la théorie et l'usage des logarithmes, et terminées par de nouvelles tables plus approchées, et de plusieurs autres tables utiles à la recherche des longitudes en mer, etc.

198. Chaque logarithme est composé de deux parties, l'une qui est un nombre entier, l'autre qui contient des figures décimales. L'entier s'appelle la *caractérisque* du logarithme. Cette caractéristique contient toujours autant d'unités, moins une, que le nombre auquel appartient le logarithme contient de chiffres. Ainsi les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 9 inclusivement ont o pour caractéristique; depuis 10 jusqu'à 99 ils ont 1 pour caractéristique; depuis 100 jusqu'à 999 ils ont 2 pour caractéristique; depuis 1000 jusqu'à 9999 ils ont 3 pour caractéristique; etc. Il est clair, en effet, que o étant le logarithme de 1, et 1 étant le logarithme de 10, tout nombre compris entre 1 et 10 aura un logarithme plus grand que o et moindre que 1; ce logarithme ne pourra donc contenir que des parties décimales. De même, 2 étant le logarithme de 100, tout nombre compris entre 10 et 100 aura un logarithme plus grand que 1 et moindre que 2; ce logarithme contiendra donc une unité suivie de parties décimales; ainsi de suite pour les autres nombres compris entre 100 et 1000, entre 1000 et 10000, etc. D'après cette remarque il est facile de suppléer la caractéristique dans les tables, lorsqu'elle ne s'y trouve pas. Il y a effectivement des tables, comme par exemple celle de Gardiner, où l'on a jugé à propos de la supprimer.

Usage des tables de logarithmes pour les calculs numériques.

199. Il est évident, par la formation des tables des logarithmes, que si, dans la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., on prend quatre termes qui forment une proportion géométrique, les quatre logarithmes correspondants formeront une proportion arithmétique. Car, si on avoit écrit dans les tables tous les nombres qu'elles renferment implicitement, on auroit deux progressions correspondantes terme à terme, l'une géométrique, l'autre arithmétique. Or, quatre nombres pris dans la première étant supposés en proportion géométrique, il y a nécessairement (179) autant de termes entre le premier et le second qu'entre le troisième et le quatrième, puisque le second doit être composé du premier et de la raison de la progression, exactement de la même manière que le quatrième est composé du troisième et de la même raison. Donc aussi, dans la progression arithmétique, il y aura même nombre de termes entre le premier logarithme et le second qu'entre le troisième et le quatrième; et par conséquent (158) ces quatre logarithmes formeront une proportion arithmétique.

Cela posé, rien n'est plus facile à comprendre que les usages des logarithmes. Ils se réduisent tous, dans le fond, à deux; savoir, à changer la multiplication en addition, et la division en soustraction. Voici comment ces deux opérations s'exécutent.

200. Problême I. *Multiplier deux nombres l'un par l'autre.*

Cherchez dans les tables les logarithmes de ces deux nombres, additionnez ensemble ces logarithmes, vous formerez par là une somme qui est le logarithme du produit cherché; de manière que, prenant dans les tables le nombre auquel répond ce nouveau logarithme, il sera le produit des deux nombres proposés. Car, dans toute multiplication, l'unité, le multiplicateur, le multiplicande et le produit, forment une proportion géométrique, puis-

que le produit contient le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Ainsi, toutes les fois qu'on veut avoir le produit de deux nombres, on cherche réellement le quatrième terme de cette proportion. Or, à ces quatres termes en proportion géométrique répondent quatre logarithmes en proportion arithmétique. Donc, pour avoir le logarithme du produit, il faut (155) ajouter ensemble les logarithmes du multiplicande et du multiplicateur, et retrancher de la somme le logarithme de l'unité. Et comme le logarithme de l'unité est zéro, la soustraction est toute faite; de sorte que le logarithme du produit est simplement égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.

Si l'unité avoit eu pour logarithme un autre nombre que zéro, il auroit fallu retrancher réellement ce logarithme de la somme des logarithmes du multiplicande et du multiplicateur. C'est pour s'épargner cette soustraction qu'on a fait répondre le terme 0 de la progression arithmétique des logarithmes au terme 1 de la progression géométrique.

Par exemple, qu'on ait à multiplier le nombre 345 par 23, on opérera ainsi :

Le logarithme de 345 est	2,5378191
celui de 23 est	1,3617278
la somme de ces deux logarithmes est	3,8995469

On trouve dans les tables qu'au logarithme 3,8995469 répond le nombre 7935, qui est par conséquent le produit de 345 par 23.

201. *Corollaire I.* Puisque le logarithme d'un produit est toujours égal à la somme des logarithmes de ses facteurs, il s'ensuit qu'en augmentant d'une unité, de deux unités, de trois unités, etc., la caractéristique du logarithme d'un nombre, on aura le logarithme du produit de ce nombre multiplié par 10, ou par 100, ou par 1000, etc.; car les facteurs 10, 100, 1000, etc., ont logarithmes les nombres entiers 1, 2, 3, etc. Ains

exemple, le nombre 34 ayant pour logarithme 1,5314789,
le nombre 340 a pour logarithme 2,5314789,
le nombre 3400 a pour logarithme 3,5314789,
le nombre 34000 a pour logarithme 4,5314789,
etc.

202. *Corollaire II.* Il suit du même principe, 1.° que pour élever un nombre au quarré il faut doubler son logarithme; ce double est le logarithme du quarré. Car élever un nombre au quarré n'est autre chose que multiplier ce nombre par lui-même.

Par exemple, pour quarrer 15, je prends son logarithme qui est 1,1760913, je le double, et j'ai 2,3521826. A ce dernier logarithme répond le nombre 225, qui est le quarré de 15.

2.° Que, pour élever un nombre au cube, il faut tripler son logarithme; ce triple sera le logarithme du cube. Car élever un nombre au cube n'est autre chose que multiplier ce nombre deux fois de suite par lui-même.

Ainsi, pour cuber 15, je triple son logarithme 1,1760913; ce triple est 3,5282739, logarithme auquel répond le nombre 3375, qui est le cube de 15.

3.° Que, pour élever un nombre à la quatrième, cinquième, sixième, etc. puissance, il faut quadrupler, quintupler, sextupler, etc. son logarithme.

203. *Corollaire III.* Donc réciproquement, pour avoir le logarithme de la racine quarrée, il faut prendre la moitié du logarithme du quarré; pour avoir le logarithme de la racine cube, il faut prendre le tiers du logarithme du cube; etc.

Par exemple, si on me demande la racine quatrième de 81, je chercherai dans les tables le logarithme de 81. Ce logarithme est 1,9084850. J'en prends le quart qui est 0,4771212; et je trouve qu'à ce dernier logarithme répond le nombre 3, qui est la racine cherchée.

Lorsque le nombre dont on demande une racine n'est pas une puissance parfaite de cette racine, le logarithme de la racine ne se trouve qu'en partie dans les tables; alors

on ne peut trouver la racine que par approximation, comme on le verra ci-dessous.

204. Problème II. *Diviser un nombre par un autre.*

Cherchez dans les tables les logarithmes du dividende et du diviseur ; retranchez le second logarithme du premier, le reste sera le logarithme du quotient ; car le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, il s'ensuit (200) que le logarithme du dividende est égal à la somme des logarithmes du diviseur et du quotient, et que par conséquent le logarithme du quotient est égal à la différence des logarithmes du dividende et du diviseur.

Qu'on ait, par exemple, à diviser 952 par 34 ; on opérera ainsi :

Le logarithme de 952 est 2,9786370
celui de 34 est 1,5314789

la différence de ces deux logarithmes est . . . 1,4471581

On trouve dans les tables qu'à ce dernier logarithme 1,4471581 répond le nombre 28, qui est le quotient cherché.

Lorsque le dividende n'est pas exactement divisible par le diviseur, le logarithme du quotient ne se trouve qu'en partie dans les tables. Nous expliquerons tout-à-l'heure comment elles servent à trouver le quotient approché.

205. *Corollaire I.* Le logarithme du quotient étant toujours égal à l'excès du logarithme du dividende sur le logarithme du diviseur, il est clair que si de la caractéristique du logarithme d'un nombre on retranche une unité, deux unités, trois unités, etc., on aura le logarithme du quotient du nombre proposé divisé par 10, ou par 100, ou par 1000, etc. Ainsi, par exemple, le nombre 34000 ayant pour logarithme 4,5314789
le nombre $\frac{34000}{10}$ ou 3400 a pour logarithme . . 3,5314789
le nombre $\frac{34000}{100}$ ou 340 a pour logarithme . . 2,5314789
le nombre $\frac{34000}{1000}$ ou 34 a pour logarithme . . 1,53147
le nombre $\frac{34000}{10000}$ ou 3,4 a pour logarithme . . 0,53147

206. *Corollaire II.* Lorsque dans une proportion, ou règle de trois, on connoît trois termes, et qu'on veut déterminer celui qui manque, par le moyen des logarithmes; si ce terme est un extrême, il faut ajouter ensemble les logarithmes des moyens, et retrancher de la somme le logarithme de l'autre extrême; le reste sera le logarithme de l'extrême cherché : et si le terme inconnu est un moyen, il faut ajouter ensemble les logarithmes des deux extrêmes, et retrancher de la somme le logarithme du moyen connu; le reste sera le logarithme du moyen cherché. Tout cela est clair (200 et 204), puisque, dans une proportion géométrique, un extrême est égal au produit des moyens divisé par l'autre extrême, et un moyen est égal au produit des extrêmes divisé par l'autre moyen.

Supposons, par exemple, qu'on demande le quatrième terme d'une proportion géométrique qui commence par les trois nombres 9, 27, 54; l'opération se fera ainsi :

le logarithme de 27 est.	1,4313638
le logarithme de 54 est.	1,7323938
Somme . .	3,1637576
le logarithme de 9 est	0,9542425
reste . .	2,2095151

A ce logarithme 2,2095151, qui est l'excès de la somme des logarithmes des moyens de la proportion sur celui de l'extrême 9, répond le nombre 162, qui est le quatrième terme cherché; en sorte que la proportion complète est 9 : 27 :: 54 : 162.

207. Problème III. *Déterminer le logarithme d'un nombre qui n'est pas dans les tables.*

On a quelquefois besoin des logarithmes de certains nombres qui ne sont pas dans les tables : tels sont les nombres qui excèdent l'étendue de ces tables, les nombres composés d'entiers et de fractions, et les nombres purement fractionnaires. Je vais expliquer ce qu'il faut faire dans ces différents cas; et, pour me rendre plus clair, je raisonnerai sur des exemples.

208. **Exemple I.** *Trouver le logarithme du nombre* 788873 *qui excède* 20000.

Je suppose qu'on ait entre les mains des tables dont les nombres naturels aillent seulement jusqu'à 20000.

En séparant vers la droite par une virgule les deux derniers chiffres du nombre proposé, on a (Arith. 20) le nombre 100 fois plus petit 7888,73, dont la partie 7888 est comprise dans les tables. Je prends la différence des logarithmes des deux nombres 7888 et 7889 qui se suivent immédiatement; cette différence est 0,0000551. Ensuite, considérant que les différences des nombres qui ne diffèrent pas beaucoup entre eux peuvent être supposées sensiblement proportionnelles (1) à celles de leurs logarithmes, je me propose cette règle de trois : si, pour 1, différence des deux nombres 7888 et 7889, on a 0,0000551 pour différence de leurs logarithmes, combien pour 0,73, différence des deux nombres 7888,73 et 7888, aura-t-on pour la différence de leurs logarithmes? Ainsi cette dernière différence est le quatrième terme de la proportion suivante, $1 : 0,73 :: 0,0000551 : x$. On trouve que le quatrième terme x est 0,000040223, ou bien, en rejetant les deux dernières figures décimales, 0,0000402. Ajoutant ce nombre à 3,8969669, logarithme de 7888, on aura 3,8970071 pour le logarithme de 7888,73. Donc (205), en ajoutant 2 unités à la caractéristique, on aura 5,8970071 pour le logarithme du nombre proposé 788873, qui est 100 fois plus grand que 7888,73.

209. **Exemple II.** *Soit le nombre* $12 + \frac{2}{3}$, *composé d'un entier et d'une fraction, dont on demande le logarithme.*

Je réduis l'entier 12 en une fraction qui ait 3 pour dénominateur; par ce moyen le nombre proposé devient $\frac{36}{3} + \frac{2}{3}$, ou $\frac{38}{3}$. Or, la fraction $\frac{38}{3}$ n'est autre chose que le quotient de 38 divisé par 3; donc le logarithme du nombre proposé est égal à la différence du logarithme de 38

(1) Cela est clair à l'inspection d'une ligne courbe appelée *logarithmique*, dont on trouve la description et les propriétés dans le *Traité des Calculs différentiel et intégral.* Tom. I.

et du logarithme de 3; cette différence se trouve ainsi:

logarithme de 38. 1,5797836

logarithme de 3 0,4771213

Différence ou reste . . 1,1026623

Si les termes de la fraction résultante n'étoient pas compris dans les tables, on détermineroit leurs logarithmes par la méthode de l'exemple précédent. Par exemple, si on avoit le nombre $38 + \frac{19}{579}$, ou $\frac{22021}{579}$: comme le numérateur de la fraction $\frac{22021}{579}$ n'est pas compris dans les tables que je suppose n'aller que jusqu'à 20000, on déterminera le logarithme de ce terme comme tout-à-l'heure, et on trouvera qu'il est 4,3428370, dont retranchant 2,7626786, logarithme de 579, reste 1,5801584 pour le logarithme de $\frac{22021}{579}$ ou de $38 + \frac{19}{579}$.

210. Exemple III. *Soit le nombre purement fractionnaire $\frac{3}{8}$ dont il faut trouver le logarithme.*

Toute fraction étant le quotient du numérateur divisé par son dénominateur, le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur moins le logarithme du dénominateur. Mais, comme ici le logarithme du dénominateur est plus grand que celui du numérateur et ne peut par conséquent en être retranché, j'observe que la fraction $\frac{3}{8}$ est la même chose que le quotient de 1 divisé par la fraction inverse $\frac{8}{3}$. Ainsi log. $\frac{3}{8}$ = log. 1 — log. $\frac{8}{3}$ = 0 — log. $\frac{8}{3}$; d'où l'on voit que log. $\frac{3}{8}$ = — log. $\frac{8}{3}$.

Le signe — indique que dans toutes les opérations de calcul où entrera le logarithme de la fraction $\frac{3}{8}$ plus petite que l'unité, il faudra y substituer, par voie de soustraction, le logarithme de la fraction renversée $\frac{8}{3}$ plus grande que l'unité.

Ainsi, par exemple, qu'on ait à multiplier le nombre 36 a fraction $\frac{3}{8}$. De 1,5563025, qui est le logarithme de etranche 0,4259687, qui est le logarithme de $\frac{8}{3}$, le 5o3338 est le logarithme du produit. En effet, 36 par $\frac{3}{8}$ n'est autre chose que diviser 36 par la verse $\frac{8}{3}$; donc logarit. (36 × $\frac{3}{8}$) = log. 36 — log. $\frac{8}{3}$ 38.

211. *Remarque.* Il y a moyen d'éviter les logarithmes négatifs dans le calcul des fractions, et c'est ce qu'on fait ordinairement : voici comment.

Le numérateur d'une fraction étant supposé plus petit que le dénominateur, cherchez le logarithme du numérateur dans les tables, et augmentez sa caractéristique d'un certain nombre d'unités. Ce nombre est arbitraire, et dépend du degré de précision qu'on veut mettre dans un calcul. Seulement il doit être assez grand pour qu'on ait un logarithme dont on puisse retrancher le logarithme du dénominateur : faites cette soustraction, vous aurez pour reste un logarithme qui sera égal (201) à celui du produit de la fraction par 10, ou par 100, ou par 1000, etc., selon que vous aurez ajouté à la caractéristique du logarithme du numérateur une unité, deux unités, trois unités, etc. Lorsque vous serez arrivé à la conclusion du calcul, vous tiendrez compte de cette multiplication, et vous aurez soin de faire dans les résultats les réductions convenables.

Ainsi, pour la fraction $\frac{3}{8}$ je cherche le logarithme du numérateur 3, qui est 0,4771213. J'augmente sa caractéristique de 3, par exemple ; et j'ai 3,4771213. De ce logarithme, je retranche celui de 8, qui est 0,9030900. Le reste est 2,5740313, logarithme du produit de la fraction $\frac{3}{8}$ multipliée par 1000.

Cela posé, si on avoit pour objet d'évaluer la fraction $\frac{3}{8}$ en parties décimales, on chercheroit dans les tables le nombre (exact ou approché) auquel répond le logarithme 2,5740313. Ce nombre est 375 ; et comme il est 1000 fois plus grand que la fraction $\frac{3}{8}$; on doit le rendre 1000 fois plus petit, et par conséquent y séparer trois chiffres décimaux vers la droite, pour avoir la valeur de cette fraction, qui est ainsi la même chose que 0,375.

S'il s'agissoit de multiplier la fraction $\frac{3}{8}$ par 36: au logarithme préparé 2,5740313 on ajouteroit le logarithme de 36 qui est 1,5563025, et on auroit pour somme 4,1303338, logarithme auquel répond le nombre 13500, qui est 1000 fois plus grand que le produit de la fraction $\frac{3}{8}$ par 36. Ce produit est donc 13,500 ou 13,5.

212. *Scholie I.* La même méthode s'applique d'une même manière très-commode à la multiplication et à la division des fractions, pour avoir les produits ou les quotients en parties décimales.

Qu'on ait à multiplier la fraction $\frac{5}{7}$ par la fraction $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire, à trouver la valeur de la fraction-produit $\frac{5 \times 3}{7 \times 4}$. J'ajoute ensemble les logarithmes de 5 et de 3; la somme 1,1760913 est le logarithme du numérateur de la fraction-produit : de même j'ajoute ensemble les logarithmes de 7 et de 4; la somme 1,4471580 est le logarithme du dénominateur de la même fraction. J'augmente, par exemple de 4, la caractéristique du logarithme 1,1760913; et j'ai 5,1760913, dont retranchant 1,4471580, reste 3,7289333; ce reste est le logarithme d'un nombre 10000 fois plus grand que le produit des deux fractions proposées. On ne trouve pas entièrement dans les tables le logarithme 3,7289333; et nous verrons bientôt ce qu'il faut faire en pareil cas, lorsqu'on veut mettre beaucoup de précision dans un calcul. Ici nous nous contenterons de prendre le nombre auquel répond dans les tables le logarithme le plus voisin de 3,7289333. Ce nombre est 5357, qu'on peut regarder, du moins à peu de chose près, comme le produit de la fraction $\frac{5 \times 3}{7 \times 4}$ multiplié par 10000. Donc la valeur de cette fraction est 0,5357 sensiblement; l'erreur ne va pas à $\frac{1}{10000}$.

Qu'on ait à diviser la fraction $\frac{5}{7}$ par la fraction $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire, à trouver la valeur de la fraction-quotient $\frac{5 \times 4}{7 \times 3}$. J'ajoute ensemble les logarithmes de 5 et de 4; la somme 1,3010300 est le logarithme du produit 5×4. De même j'ajoute ensemble les logarithmes de 7 et de 3; la somme 1,3222193 est le logarithme du produit 7×3. J'augmente de 3 la caractéristique du premier de ces logarithmes; et j'ai 4,3010300, dont retranchant 1,3222193, reste 2,9788107 qui est le logarithme du produit de la fraction-quotient

...ar 1000. Le nombre auquel répond ce

logarithme le plus prochainement dans les tables est 952. Ainsi la valeur de la fraction-quotient $\frac{5 \times 4}{7 \times 3}$ est 0,952 à moins de $\frac{1}{1000}$ près.

213. *Scholie II.* Tout entier pouvant être regardé comme une fraction qui a l'unité pour dénominateur, tandis qu'il en est le numérateur, on opérera d'une manière semblable pour la multiplication et la division des entiers par des fractions, ou des fractions par des entiers.

214. *Scholie III.* L'extraction des racines des fractions n'a pas plus de difficulté. Voici la règle générale qu'il faut suivre pour avoir ces racines approchées jusqu'à telle unité décimale qu'on voudra.

Pour extraire la racine quarrée, cube, quatrième, etc., d'une fraction, augmentez la caractéristique du logarithme du numérateur, de deux fois, trois fois, quatre fois, etc., autant d'unités que vous voulez avoir de chiffres décimaux à la racine. Du logarithme ainsi préparé du numérateur, retranchez celui du dénominateur; prenez la moitié, ou le tiers, ou le quart, etc., du reste; cherchez dans les tables le nombre auquel répond ce nouveau logarithme, et séparez-y vers la droite autant de figures décimales que vous vouliez en avoir. Le nombre résultant sera la racine cherchée.

Démontrons cette règle pour les racines quarrée et cube; on raisonnera semblablement pour les racines supérieures. Nous nous ferons bien entendre par des exemples.

215. Exemple I. *Soit la fraction $\frac{3}{8}$ dont on demande la racine quarrée à moins d'un millième près.*

Suivant cette condition la racine doit contenir trois figures décimales, et par conséquent le quarré en doit contenir six. Il faut donc changer la fraction $\frac{3}{8}$ en celle-ci $\frac{3,000000}{8}$. Or, en augmentant, conformément à la r
proposée, la caractéristique du logarithme du nom
de six unités, et retranchant ensuite de ce logarith

logarithme de 8, on a (201) le logarithme de la fraction $\frac{3}{8}$ multipliée par 1000000, c'est-à-dlre, de $\frac{3000000}{8}$. Donc la moitié de ce logarithme est celui de la racine de $\frac{3}{8}$ multipliée par 1000. Donc, en séparant vers la droite par une virgule trois figures décimales dans le nombre auquel répond cette moitié, on aura la racine de $\frac{3}{8}$ à moins de $\frac{1}{1000}$ près. On trouve ainsi que cette racine est 0,612.

216. Exemple II. *Tirer la racine cube de la même fraction $\frac{3}{8}$ à moins de $\frac{1}{1000}$ près.*

Suivant cette condition la racine doit contenir trois figures décimales, et par conséquent le cube en doit contenir neuf. Nous changerons donc la fraction $\frac{3}{8}$ en celle-ci $\frac{3,000000000}{8}$. Cela posé, en augmentant, comme notre règle le prescrit, la caractéristique du logarithme de 3 de neuf unités, puis soustrayant le logarithme du dénominateur 8, nous aurons le logarithme de la fraction $\frac{3000000000}{8}$. Donc, le tiers de ce logarithme est celui de la racine cube de la même fraction. Donc, si nous séparons trois figures décimales dans cette racine, nous aurons celle de la fraction $\frac{3}{8}$ suivant la condition prescrite. On trouve ainsi que cette racine est 0,722, à moins de $\frac{1}{1000}$ près.

217. *Scholie IV.* Toutes les opérations que nous venons d'enseigner pour les fractions ordinaires sont encore plus faciles pour les fractions décimales.

Qu'on ait, par exemple, à multiplier un certain nombre par la fraction décimale 0,459. J'imagine que la virgule du multiplicateur est supprimée; je cherche dans les tables le logarithme de 459, je l'ajoute à celui du multiplicande, et quand le produit est trouvé, j'y sépare trois chiffres vers la droite par une virgule, parce qu'en supprimant la virgule du multiplicateur j'ai rendu le produit 1000 fois trop grand.

Il est clair que si le multiplicande et le multiplicateur contenoient des parties décimales, il faudroit, après avoir trouvé le logarithme du produit comme si les facteurs ne contenoient pas de parties décimales, séparer dans le

nombre correspondant à ce logarithme autant de figures décimales qu'il y en avoit en tout dans les deux facteurs de la multiplication.

Qu'on eût à diviser un certain nombre par 0,459, il faudroit retrancher du logarithme du dividende celui de 459; ensuite le nombre auquel répond la différence de ces deux logarithmes étant trouvé, on le reculeroit de trois places vers la gauche pour avoir le quotient demandé.

Faut-il tirer la racine quarrée de la fraction décimale 0,273, de manière qu'elle ne diffère pas de $\frac{1}{10000}$ de la vraie racine? Comme on veut avoir des *dix-millièmes* à la racine, je donne huit figures décimales à la fraction proposée, en remplissant les places de la droite par des zéros, ce qui n'en change pas la valeur. Par ce moyen la fraction décimale 0,273 devient 0,27300000. J'imagine que la virgule est supprimée, et je cherche le logarithme de 27300000; ce logarithme est 7,4361627, dont la moitié est 3,7180813. A ce dernier logarithme répond le nombre 5225. Séparant dans ce nombre quatre figures décimales vers la droite, on aura 0,5225 pour la racine cherchée.

Demande-t-on la racine cube de 0,04, à moins de $\frac{1}{1000}$ près? j'écris la fraction décimale sous cette forme 0,040000000; et je cherche le logarithme de 40000000. Ce logarithme est 7,6020600, dont le tiers est 2,5340200. A ce logarithme répond le nombre 342. Je sépare dans ce nombre trois figures décimales vers la droite par une virgule, et j'ai 0,342 pour la racine cherchée.

218. Problème IV. *Déterminer un nombre dont le logarithme n'est pas dans les tables.*

Il arrive souvent (et nous en avons vu des exemples) que par le résultat d'un calcul de logarithmes on est mené à des logarithmes qui ne se trouvent pas entièrement, mais seulement en partie, dans les tables. Alors, pour déterminer les nombres auxquels appartiennent ces logarithm[es] on a besoin des moyens que nous allons expliquer.

1.° Si un logarithme ne diffère que d'une unité décim[ale] du dernier ordre d'un logarithme pris dans les tabl[es]

cette différence doit être regardée comme nulle, parce que le dernier chiffre des logarithmes dans les tables n'est exact qu'à $\frac{1}{2}$ unité près de cet ordre. Ainsi le nombre qui répond au logarithme des tables pourra être regardé comme celui auquel appartient le logarithme proposé.

2.° Supposons un logarithme qui diffère de plusieurs parties décimales d'un logarithme pris dans les tables; par exemple, soit le logarithme 3,8999777, et qu'il s'agisse de déterminer le nombre auquel il appartient : en cherchant dans les tables je trouve que ce logarithme tombe entre les logarithmes des deux nombres voisins 7942 et 7943. D'où je conclus d'abord que 7942 est le nombre entier qui sera ici la partie principale du nombre demandé. Pour avoir la partie fractionnaire qu'il faut ajouter à ce nombre entier, je prends la différence des logarithmes des deux nombres 7943 et 7942; elle est 0,0000547; je prends la différence du logarithme proposé 3,8999777 et du logarithme de 7942; elle est 0,0000478. Ensuite je fais cette proportion, qui est fondée sur le principe déja employé (208), $0,0000547 : 0,0000478 :: 1 : x$, ou bien $547 : 478 :: 1 : x$. Le quatrième terme x, qui a pour valeur $\frac{478}{547}$, est la fraction qu'il faut ajouter au nombre 7942, pour avoir le nombre auquel répond le logarithme proposé 3,8999777. Cette fraction réduite en parties décimales est à peu près 0,874. Ainsi le nombre cherché est $7942\frac{478}{547}$, ou 7942,874.

Si le logarithme dont on veut avoir le nombre étoit 1,8999777, qui ne diffère du précédent que par la caractéristique, il sera avantageux de le chercher dans les tables avec la caractéristique 3, plutôt qu'avec la caractéristique 1. (Je suppose toujours que les tables qu'on a ne vont que jusqu'à 10000 ou 20000). Alors on aura tout d'un coup le nombre cherché, exprimé jusqu'aux centièmes; ce nombre est 79,43. J'écris 43 centièmes, et non pas 42 centièmes : car on voit au premier coup-d'œil en regardant les tables, que le logarithme 3,8999777 est plus voisin du logarithme de 7943 que de celui de 7942.

Si on a besoin d'exprimer le nombre demandé avec une plus grande exactitude, on cherchera les autres chiffres

décimaux comme ci-dessus, en faisant la proportion, 547 : 478 :: 0,01 (excès de 79,43 sur 79,42) : x. On trouve que x, exprimé avec une seule figure décimale significative est 0,008 ; avec deux, 0,0087 ; avec trois, 0,00874 ; etc. Ainsi la valeur du nombre cherché est, avec deux figures décimales, 79,42, ou plus exactement 79,43 ; avec trois figures, 79,428 ; avec quatre, 79,4287 ; avec cinq, 79,42874 ; etc.

Considérons un autre exemple. Qu'il s'agisse de trouver le nombre auquel appartient le logarithme 0,7122402. Je cherche ce logarithme dans les tables avec la caractéristique 3 ; je trouve que sa place est alors entre les logarithmes de 5155 et de 5156, et que la fraction qu'il faudroit ajouter à 5155 est $\frac{115}{842}$, ou à peu près 0,136. Ainsi, si le logarithme proposé avoit eu réellement 3 pour caractéristique, le nombre cherché auroit été 5155,136 ; mais ce logarithme ayant 0 pour caractéristique, cela montre que le nombre auquel il appartient ne doit avoir qu'un seul chiffre parmi les entiers, ou à la gauche de la virgule, et que par conséquent tous les autres chiffres trouvés sont des décimales. Le nombre demandé est donc 5,155136.

Je remarquerai en passant, et pour faire mieux sentir aux commençants le grand avantage des logarithmes, que le logarithme donné est le tiers du logarithme de 137 ; qu'ainsi le nombre trouvé 5,155136 est la racine cube de 137, approchée par un calcul bien expéditif jusqu'au sixième chiffre décimal.

219. *Scholie.* On trouve de même un nombre auquel répond un logarithme dont la caractéristique excède celle des logarithmes compris dans les tables. Il faut commencer par diminuer la caractéristique du logarithme donné, jusqu'à ce qu'on ait une caractéristique comprise dans les limites des tables, puis déterminer, comme on vient de le faire, le nombre auquel appartient le nouveau logarithme. Ensuite on reculera ce nombre d'autant de rangs vers la gauche qu'on avoit supprimé d'unités dans la caractéristique du logarithme proposé. Ainsi, par exemple, ayant trouvé qu'au logarithme 3,7122402 répond le nombre 5155,136,

on conclura qu'aux logarithmes suivants répondent les nombres qu'on voit à côté.

Logarithmes.	*Nombres.*
4,7122402	51551,36
5,7122402	515513,6
6,7122402	5155136
etc.	

Enfin qu'on ait un logarithme négatif, tel que celui-ci, — 1,2041200 ; je cherche le nombre auquel répond le logarithme pris positivement ; ce nombre est 16. Ainsi (210) le logarithme négatif — 1,2041200 appartient à la fraction $\frac{1}{16}$.

Soit en second lieu le logarithme négatif — 2,4785550. Je trouve que le nombte qui répond au logarithme positif 2,4785550 est 300,992 ; d'où je conclus que le nombre auquel répond le logarithme négatif proposé est la fraction $\frac{1}{300{,}992}$, ou à peu près 0,0033223.

220. *Conclusion.* Il ne me reste plus qu'à expliquer l'usage qu'on fait, principalement dans l'astronomie, des compléments arithmétiques pour le calcul des logarithmes.

On appelle *complément arithmétique* d'un logarithme l'excès du nombre 10, ou 100, ou 1000, etc. sur ce logarithme.

Cet excès se prend facilement à vue dans les tables, comme on le va comprendre par l'exemple suivant. Soit le logarithme 0,7781513, qui est celui de 6. Pour avoir l'excès de 10 sur ce nombre, suivant les règles ordinaires de la soustraction, il faudroit écrire ainsi les deux nombres, comme on le voit ici.

999999
10,0000000
0,7781513
9,2218487

Ensuite on retrancheroit le dernier chiffre de la droite du nombre inférieur 10, et chacun des autres de 9. Or, sans écrire les deux nombres, le reste de la soustraction se trouve sans nulle difficulté, en écrivant de gauche à droite, à la place de chaque chiffre du logarithme, l'excès de 9 sur ce chiffre, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au dernier chiffre à droite, à la place duquel il faut écrire le nombre dont il est surpassé par 10.

Les compléments arithmétiques servent à convertir les soustractions de logarithmes en additions, et cela abrège le calcul en plusieurs cas. Supposons, par exemple, qu'on demande le quatrième terme d'une proportion géométrique. En suivant à la lettre la règle prescrite (206), il faut ajouter ensemble les logarithmes des deux moyens, et retrancher de la somme le logarithme du premier terme; mais vous y satisfaites également en prenant le complément arithmétique du premier terme, l'ajoutant avec les deux autres logarithmes, et rejetant une dixaine de la caractéristique de la somme résultante, à raison de l'augmentation faite dans la caractéristique par la manière dont le complément arithmétique se trouve. Eclaircissons cela par un exemple.

On demande le quatrième terme de la proportion suivante, $64:128::249:x$;

logarithme de 128	2,1072100
logarithme de 249	2,3961994
complément arithmétique du logarith. de 64	8,1938200
Somme	12,6972294

Supprimant une dixaine de la caractéristique de cette somme, on aura 2,6972294 pour le logarithme du quatrième terme cherché. On trouve qu'à ce logarithme répond le nombre 498. Ainsi la proportion complète est $64 : 128 :: 249 : 498$.

Les autres usages des compléments arithmétiques reviennent au précédent. C'est pourquoi je ne m'y arrête pas davantage.

Moyens abrégés que l'algèbre fournit pour le calcul des logarithmes.

221. Les moyens dont il s'agit, et que je vais exposer presque entièrement d'après l'*Introduction à l'analyse des infiniment petits d'Euler*, étoient inconnus aux premiers calculateurs des tables de logarithmes, à qui ils auroient épargné beaucoup de peines. Aujourd'hui, sans entreprendre un travail inutile, ces moyens peuvent servir du moins à étendre davantage les tables de logarithmes, ou

même à en vérifier certaines parties, ce qui fixera le degré de confiance que l'on doit accorder au reste.

222. Dans les tables usitées, le nombre 10 forme, par ses différentes puissances entières ou rompues, tous les termes des différentes progressions géométriques qui y sont renfermées formellement ou tacitement ; et les exposants de ces puissances sont les logarithmes des termes en question. En conséquence, le nombre 10 s'appelle *la base logarithmique* des tables ordinaires. Mais on auroit pu prendre toute autre base logarithmique.

223. Supposons en général que le nombre a, plus grand que l'unité, soit la base d'un systéme de logarithmes, et donnons-lui l'exposant variable z, de manière que l'expression a^z représente tous les nombres possibles, en attribuant successivement différentes valeurs à l'exposant z. Il est clair,

1.° Que le logarithme de l'unité sera toujours zéro, quelle que soit la base a. Car, en général (59), $a^0 = 1$.

2.° Que le logarithme de la base a sera 1, puisque (37) a est la même chose que a^1.

3.° Que tous les nombres au dessus de 1 auront pour logarithme des nombres positifs. Ainsi, par exemple, en supposant $a = 10$, le nombre 1000, ou $(10)^3$, a pour logarithme le nombre positif 3.

4.° Que tous les nombres au dessous de 1 auront pour logarithmes des nombres négatifs. Car, par exemple, en supposant $a = 10$, le nombre $\frac{1}{1000}$, ou $(10)^{-3}$, a pour logarithme le nombre négatif -3.

224. *Corollaire I.* Soient deux nombres N et N′, auxquels répondent respectivement les deux logarithmes p et p', pour une même base logarithmique a : on aura $N = a^p$, $N' = a^{p'}$; et par conséquent $N \times N' = a^p \times a^{p'} = a^{p+p'}$. D'où l'on voit que dans tout systéme de logarithmes le logarithme $p + p'$ d'un produit $N \times N'$, composé de deux facteurs, est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.

225. *Corollaire II.* Il suit de là que si on a tant de nom-

bres A, B, C, D, qu'on voudra, on aura (en se servant de la lettre initiale l pour désigner un logarithme),

1.° $l(A \times B \times C \times D) = l.\,A + l.\,B + l.\,C + l.\,D$.

Car, supposant $A \times B = N$; nous aurons $l.\,(A \times B \times C \times D) = l.\,(N \times C \times D)$. Soit encore $N \times C = N'$; on aura $l.\,(A \times B \times C \times D) = l.\,(N' \times D) = l.\,N' + l.\,D$. Or, $l.\,N' = l.\,(N \times C) = l.\,N + l.\,C$, et $l.\,N = l.\,(A \times B) = l.\,A + l.\,B$. Donc enfin

$$l.\,(A \times B \times C \times D) = l.\,A + l.\,B + l.\,C + l.\,D.$$

Ainsi *le logarithme d'un produit composé d'un nombre quelconque de facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.*

2.° Si $A = B = C = D$, on aura $l.\,(A \times A \times A \times A)$, ou $l.\,A^4 = 4l.\,A$. En général $l.\,A^n = n\,l.\,A$. Par où l'on voit que *le logarithme d'une puissance entière positive* n *d'un nombre* A *est égal à* n *fois le logarithme de* A.

3.° On a aussi $l.\,A^{\frac{n}{p}} = \frac{n}{p}\,l.\,A$ (n et p étant des nombres entiers positifs). Car soit $A^{\frac{n}{p}} = K$, et par conséquent $l.\,A^{\frac{n}{p}} = l.\,K$. L'équation $A^{\frac{n}{p}} = K$ donne (en élevant tout à à la puissance p), $A^n = K^p$; et par conséquent $n\,l.\,A = p\,l.\,K$, ou $\frac{n}{p}\,l.\,A = l.\,K = l.\,A^{\frac{n}{p}}$.

226. *Corollaire III.* Du même principe il suit,

1.° que $l.\,\frac{A}{B} = l.\,A - l.\,B$.

Car soit $\frac{A}{B} = Q$, et par conséquent $A = B \times Q$; on aura $l.\,A = l.\,(B \times Q) = l.\,B + l.\,Q$; donc $l.\,Q = l.\,A - l.\,B$.

Ainsi *le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur*; ou bien encore *le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur moins le logarithme du dénominateur.*

2.° $l.\,A^{-n} = -n\,l.\,A$; car $A^{-n} = \frac{1}{A^n}$; donc $l.\,A^{-n} =$ $l.\,1 - l.\,A^n = 0 - n\,l.\,A$; ce qui n'est que —

3.° $l.\,A^{-\frac{n}{p}} = -\frac{n}{p}\,l.\,A$; car $A^{-\frac{n}{p}} = \frac{1}{A^{\frac{n}{p}}}$; d'où résulte

$l.\,A^{-\frac{n}{p}} = 0 - \frac{n}{p}\,l.\,A = -\frac{n}{p}\,l.\,A.$

227. *Corollaire IV.* Supposons maintenant deux systêmes de logarithmes dont les bases soient respectivement a et b. Soit un même nombre N qui ait p pour logarithme dans le premier systême, et q pour logarithme dans le second ; nous aurons en conséquence $N = a^p$, $N = b^q$; ce qui donne $a^p = b^q$, et $b = a^{\frac{p}{q}}$ Donc, en prenant les logarithmes pour le systême a, on aura $l.\,b = \frac{p}{q}\,l.\,a$; ou (à cause de $l.\,a = 1$), $l.\,b = \frac{p}{q}$, ou $q = \frac{p}{l.\,b} = p \times \frac{1}{l.\,b}$.

Ainsi, *connoissant le logarithme* p *d'un nombre quelconque* N *pour le systême* a, *on aura le logarithme* q *du même nombre pour le systême* b, *en multipliant* p *par une fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le logarithme de* b, *pris dans le systême* a.

228. Problême I. *Former, pour un même systême de logarithmes, une équation entre la base logarithmique, un nombre quelconque positif, et le logarithme de ce nombre.*

Nommons a la base logarithmique, n le nombre proposé. Soit N un autre nombre qui ait π pour logarithme, en sorte que $N = a^{\pi}$, et $\pi = l.\,N$. On voit que si l'exposant π étoit zéro, on auroit $N = 1$; donc si π est peu au-dessus de o, N sera peu au-dessus de 1. Supposons donc que π étant une quantité très-petite, on ait $N = 1 + k\pi$, expression dans laquelle k est un coëfficient indéterminé ; nous aurons $\pi = l.\,(1 + k\pi)$, et $m\pi = l.\,(1 + k\pi)^m$, quel que soit l'exposant m. Et comme, à mesure que l'exposant m surpassera l'unité, la quantité $(1 + k\pi)^m$ augmentera continuellement, et qu'elle aura par conséquent pour logarithmes des nombres finis qui augmenteront aussi continuellement ; il faut que m soit un nombre infini, sans quoi le produit $m\pi$ ne pourroit pas devenir fini, à cause du facteur infiniment petit π qu'il renferme.

Imaginons qu'on ait $(1 + k\pi)^m = 1 + x$, et par conséquent $1 + k\pi = (1+x)^{\frac{1}{m}}$, $k\pi = (1 + x)^{\frac{1}{m}} - 1$, $m\pi = l.(1+x)$, $\frac{k}{m} = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{m}} - 1}{l.(1+x)}$, $l.(1 + x) = \frac{m}{k}(1 + x)^{\frac{1}{m}} - \frac{m}{k}$.

Or, (145) $(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1x}{m} - \frac{1(m-1)x^2}{m \times 2m} + \frac{1(m-1)(2m-1)x^3}{m \times 2m \times 3m} - \frac{1(m-1).(2m-1)(3m-1)x^4}{m \times 2m \times 3m \times 4m}$ + etc. Donc $l.(1+x) = \frac{1}{k}$ $\left(x - \frac{1(m-1)x^2}{2m} + \frac{1(m-1)(2m-1)x^3}{2m \times 3m} - \frac{1(m-1)(2m-1)(3m-1)x^4}{2m \times 3m \times 4m} + \text{etc.}\right)$. Donc (en supposant m infini, et observant qu'alors $m - 1 = m$, $2m - 1 = 2m$, $3m - 1 = 3m$, etc., attendu que l'unité doit être considérée comme une quantité nulle par rapport au nombre infini m), on aura

$$l.(1 + x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right).$$

Faisant x négative, on aura semblablement

$$l.(1 - x) = \frac{1}{k}\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{etc.}\right).$$

Donc, en retranchant cette équation de la précédente, on aura

$$l.(1+x) - l.(1-x) = \frac{2}{k} \times \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right):$$

Or, $l.(1 + x) - l.(1 - x) = l.\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$; on aura donc,

$$l.\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = \frac{2}{k}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right);$$

série qui converge plus rapidement que chacune des deux séries qui expriment $l.(1 + x)$ et $l.(1 - x)$.

Maintenant, supposons que le nombre proposé et arbitraire n soit tel qu'on ait $n = \frac{1 + x}{1 - x}$, et par conséquent $x = \frac{n - 1}{n + 1}$; en substituant ces valeurs de $\frac{1 + x}{1 - x}$ et de x dans la dernière équation que nous venons de trouver, nous aurons :

$$(A)\ l.\,n = \frac{2}{k}\left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7} + \text{etc.}\right).$$

Pour déterminer le coëfficient inconnu k, on observera qu'en faisant $n = a$ on a $l.\,n = 1$; ainsi l'équation précédente devient alors :

$$1 = \frac{2}{k}\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \frac{(a-1)^7}{7(a+1)^7} + \text{etc.}\right);$$

d'où l'on tire,

$$k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \text{etc.}\right).$$

Connoissant ainsi k, on substituera sa valeur dans l'équation générale (A), et on aura la formule demandée, c'est-à-dire, une équation où il n'entrera que a, n, et $l.\,n$.

Par exemple, dans les tables ordinaires des logarithmes, la base logarithmique est 10 : faisant donc $a = 10$, on trouvera $k = 2{,}302585$ à peu de chose près. Mettant cette valeur de k dans l'équation (A), on aura une formule commode et expéditive pour calculer le logarithme d'un nombre quelconque n.

229. *Remarque.* La base logarithmique a et le nombre k ont une liaison réciproque, et telle que l'une de ces deux quantités étant donnée, l'autre le sera aussi. En effet, nous avons trouvé k en a. Réciproquement on peut déterminer a en k : car supposons, comme dans l'article précédent, $(1 + k\varpi)^m = 1 + x$; on aura

$$1 + x = 1 + km\varpi + \frac{k^2 m(m-1)\varpi^2}{1\,.\,2} + \frac{k^3 m.(m-1)(m-2)\varpi^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{k^4.m(m-1)(m-2)(m-3)\varpi^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \text{etc.}$$

Faisant m infini, et mettant pour $m\varpi$ sa valeur $l.\,(1 + k\varpi)^m$, ou $l.\,(1 + x)$; on aura

$$1 + x = 1 + k.\,l.\,(1 + x) + \frac{k^2[l.\,(1+x)]^2}{1\,.\,2} + \frac{k^3[l.\,(1+x)]^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{k^4[l.\,(1+x)]^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Donc, en supposant $1+x=a$, et par conséquent $l.(1+x)=1$, on aura

$$a=1+k+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4}+\text{etc.};$$

série qui convergera, pourvu que k soit au dessous de l'unité, ou même ne surpasse pas l'unité.

Si on suppose $k=1$, on trouvera $a=2,718282$, à peu près.

230. *Corollaire.* De là suit un moyen d'abréger encore le calcul des logarithmes. Prenons $k=1$, et supposons successivement $n=\frac{2}{1}$, $n=\frac{3}{2}$, $n=\frac{4}{3}$, $n=\frac{5}{4}$, et en général $n=\frac{h}{h-1}$; la formule (A) deviendra:

$$(B)\ l.\left(\frac{h}{h-1}\right)=\frac{2}{2h-1}\left(1+\frac{1}{3(2h-1)^2}+\frac{1}{5(2h-1)^4}+\frac{1}{7(2h-1)^6}+\text{etc.}\right)$$

Cela posé, on a d'abord zéro pour le logarithme de l'unité. Le logarithme du nombre 2 se trouve par la formule précédente, en supposant $h=2$; les logarithmes des fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, se trouvent par la même formule, en faisant successivement $h=3$, $h=4$, $h=5$, etc. Tous ces logarithmes étant trouvés, on aura ceux des nombres entiers 3, 4, 5, 6, etc. par les équations suivantes que donne l'article 224; $l.\ 3=l.\ 2+l.\frac{3}{2}$; $l.\ 4=l.\ 3+l.\frac{4}{3}$; $l.\ 5=l.\ 4+l.\frac{5}{4}$; etc. Connoissant de cette manière les logarithmes de tous les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. pour l'hypothèse de $k=1$, nous formerons ceux des tables ordinaires, où la base logarithmique est 10, en multipliant (227) chacun des logarithmes précédents par une fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le logarithme de 10 pour l'hypothèse de $k=1$, lequel logarithme étant 2,302585 à peu près, cette fraction a pour valeur $\frac{1}{2,302585}$, ou 0,434294.

Réciproquement, si on avoit commencé par calculer directement, au moyen de la formule (A), les logarithmes des tables ordinaires, où $a=10$, et $k=2,302585$, on au-

roit les logarithmes pour l'hypothèse de $k=1$, en multipliant les logarithmes des tables ordinaires par 2,302585 : car, soient, pour un même nombre quelconque, L le logarithme des tables ordinaires, l le logarithme pour l'hypothèse de $k=1$, on a, comme nous venons de le voir, $L=l\times\frac{1}{2{,}302585}$: donc $l=L\times 2{,}302585$.

231. Problême II. *Connoissant le logarithme d'un nombre, déterminer ce nombre.*

Nous avons trouvé (229), $1+x=1+k\times l(1+x)+\frac{k^2.[l.(1+x)]^2}{1.2}+\frac{k^3.[l.(1+x)]^3}{1.2.3}+\frac{k^4.[l.(1+x)]^4}{1.2.3.4}+$ etc. Donc, en supposant que n représente le nombre dont on connoît le logarithme, et faisant $1+x=n$, on aura

$$n=1+\frac{k(l.n)}{1}+\frac{k^2(l.n)^2}{1.2}+\frac{k^3(l.n)^3}{1.2.3}+\frac{k^4(l.n)^4}{1.2.3.4}+\text{ etc.}$$

Solutions de quelques problêmes dans lesquels les logarithmes sont utiles ou nécessaires.

232. Problême I. *Insérer entre deux nombres donnés* f *et* u *un nombre quelconque* n *de moyens proportionnels géométriques.*

Nous avons déja donné (180) la solution directe de ce problême; mais dans la pratique on parviendra beaucoup plus promptement au but, en faisant usage des lorithmes.

Pour cela je considère que la question est de former une progression géométrique, dont les extrêmes sont f et u, et le nombre des termes est $n+2$. Or, aux termes de cette progression répondent chacun à chacun des logarithmes qui forment une progression arithmétique. Connoissant donc par le moyen des tables de logarithmes les logarithmes de f et u, on formera par l'art. 159 la progression arithmétique dont ces logarithmes sont les extrêmes, et dont le nombre des termes est $n+2$. Ensuite les mêmes tables donneront les nombres auxquels appartiennent les

logarithmes qu'on vient de déterminer; et ces nombres seront les moyens proportionnels géométriques demandés.

233. Exemple. *Entre* 8 *et* 89 *insérer quatre moyens proportionnels géométriques.*

Dans ce cas, $f=8$, $u=89$, $n=4$. En retranchant du logarithme de 89, qui est 1,9493900
le logarithme de 8, qui est 0,9030900
on aura pour reste. 1,0463000
qui est (156), dans la progression arithmétique, le produit du nombre des termes diminué de l'unité par la différence de cette progression. Donc, en divisant 1,0463000 par 5, le quotient 0,2092600 sera la différence dont il s'agit. Avec cette différence et le premier terme 0,9030900 on trouvera (156) tous les termes de la progression arithmétique des logarithmes; ensuite les tables des logarithmes donneront les termes correspondants de la progression géométrique qu'il s'agissoit de former. Voici ces deux progressions.

Termes de la progression arithmétique des logar.	*Termes correspondants de la progression géométrique.*
0,9030900	8,000
1,1123500	12,952
1,3216100	20,971
1,5308700	33,953
1,7401300	54,971
1,9493900	89,000

234. Problème II. *Résoudre les questions IV, V, VII, VIII, de l'article* 187.

1.° Dans la question IV, il s'agit de trouver n. Or on a, par l'équation (A), $u=ar^{n-1}$. Donc, en prenant les logarithmes de part et d'autre, $l.\,u=l.\,ar^{n-1}=l.\,a+(n-1)l.\,r$; ce qui donne $n=\dfrac{l.\,r+l.\,u-l.\,a}{l.\,r}$.

2.° Pour la Question V, vous mettrez dans l'équation

$u = ar^{n-1}$, à la place de r, sa valeur $\frac{s-a}{s-u}$ donnée par l'équation (B); par là vous aurez $u = \frac{a(s-a)^{n-1}}{(s-u)^{n-1}}$, ou $u(s-u)^{n-1} = a(s-a)^{n-1}$. Donc, $l.u + (n-1)l.(s-u) = l.a + (n-1)l.(s-a)$; d'où l'on tire, en dégageant n,

$$n = \frac{l.(s-a) - l.(s-u) + l.u - l.a}{l.(s-a) - l.(s-u)}.$$

3.° En mettant (Quest. VII), pour u sa valeur $\frac{a+rs-s}{r}$, dans l'équation $u = ar^{n-1}$, on aura $\frac{a+rs-s}{r} = ar^{n-1}$, ou $a + rs - s = ar^n$; donc $l.(a+rs-s) = l.a + n.l.r$. Ainsi

$$n = \frac{l.(a+rs-s) - l.a}{l.r}.$$

4.° En mettant (Quest. VIII), pour a sa valeur $s - rs + ur$, dans l'équation $u = ar^{n-1}$, on aura $u = r^{n-1}(s - rs + ur)$, ou $ur = r^n.(s - rs + ur)$. Donc, $l.u + l.r = n\,l.r + l.(s - rs + ur)$; ce qui donne

$$n = \frac{l.u + l.r - l.(s - rs + ur)}{l.r}.$$

235. Problème III. *On a prêté une somme* S *à un intérêt tel qu'une somme* m *doive rapporter* 1 *en un an; au bout de chaque année l'intérêt qu'on devroit retirer on le laisse à l'emprunteur pour le joindre au capital, et pour former ainsi une nouvelle somme qui doit rapporter intérêt, toujours à raison de* 1 *pour* m *en un an; ainsi de suite: il s'agit de former une équation qui exprime la relation entre la somme* S *premièrement prêtée, le nombre* m, *et la somme* T *que l'emprunteur devra rendre au prêteur après un certain nombre* n *entier ou rompu d'années.*

Puisque la quantité m doit rapporter 1 d'intérêt annuel, l'intérêt annuel rapporté par S sera $S \times \frac{1}{m}$; et par conséquent l'emprunteur devra au bout de la première année une somme $= S + S \times \frac{1}{m} = S \times \left(1 + \frac{1}{m}\right)$. Traitant

cette somme, qui répond à la fin de la première année, ou au commencement de la seconde année, comme on a traité S, qui répondoit au commencement de la première, on verra que l'emprunteur devra, au bout de la seconde année, une somme $= S\left(1+\frac{1}{m}\right) \times \left(1+\frac{1}{m}\right)$ $= S \times \left(1+\frac{1}{m}\right)^2$; que pareillement, au bout de la troisième année, il devra une somme $= S \times \left(1+\frac{1}{m}\right)^3$; ainsi de suite : de sorte qu'au bout du nombre n d'années l'emprunteur doit une somme $= S \times \left(1+\frac{1}{m}\right)^n$. Or cette somme doit être T; on a donc l'équation $T = S \times \left(1+\frac{1}{m}\right)^n$, qui est celle qu'on demandoit. Cette équation renferme les quatre quantités S, m, n, T; et trois de ces quantités étant données, on pourra déterminer celle qui est inconnue.

Par exemple, soit l'intérét annuel de l'argent le denier vingt, c'est-à-dire, que 20 deniers rapportent 1 denier, ou que 100 livres rapportent 5 livres; on demande la somme que l'emprunteur doit rendre au bout de trois ans et demi. Suivant ces hypothèses, on a $\frac{1}{m} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, $n = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; ainsi on aura $T = S \times \left(1+\frac{1}{20}\right)^{\frac{7}{2}}$. On déterminera facilement la valeur du second membre de cette équation au moyen des logarithmes, en observant qu'on a en général $l.\,T = l.\,S + n\,l.\left(1+\frac{1}{m}\right)$.

Si, connoissant S, T, $\frac{1}{m}$, on demandoit n, notre équation générale $T = S \times \left(1+\frac{1}{m}\right)^n$ donneroit $l.\,T = l.\,S + n\,l.\left(1+\frac{1}{m}\right)$; et par conséquent $n = \frac{l.T - l.S}{l.\left(1+\frac{1}{m}\right)}$. Par

exemple, que l'intérêt annuel soit au denier vingt, et qu'il faille savoir en combien d'années la somme premièrement prêtée sera doublée; on fera $\frac{1}{m} = \frac{1}{20}$, $T = 2S$; et on trouvera $n = \frac{l.2}{l.\frac{21}{20}} = 14$ ans 2 mois 14 jours à peu près; de sorte qu'au bout de ce temps la somme premièrement prêtée sera doublée.

236. Problème IV. *L'intérêt pour une somme donnée* m *étant toujours représenté par* 1, *on suppose maintenant qu'on prête une somme* S *pour un certain nombre* n *d'années, avec la condition qu'à la fin de chaque année l'emprunteur paiera une somme* b, *et qu'à l'expiration de la* n.^{me} *année, le capital* S *et les intérêts annuels seront entièrement remboursés, ou que l'emprunteur se trouvera quitte envers le prêteur : on demande une équation qui contienne la relation entre les quantités* S, b, m, n.

Cette question est ce qu'on appelle ordinairement le *problème des annuités*, qui est d'un fréquent usage, surtout dans les emprunts que font les gouvernements.

L'intérêt rapporté par la somme S est évidemment $S \times \frac{1}{m}$. Ajoutant cet intérêt au principal S, la somme $S + S \times \frac{1}{m}$, ou $S \times \left(1 + \frac{1}{m}\right)$, est ce que l'emprunteur devroit payer à la fin de la première année; mais, par hypothèse, il paie seulement b; ainsi, après ce paiement, il doit $S\left(1 + \frac{1}{m}\right) - b$, à la fin de la première année, ou au commencement de la seconde. Nous ferons, pour abréger un peu, $1 + \frac{1}{m} = p$, en sorte que la dette dont nous venons de parler est $Sp - b$.

Soit $Sp - b = A$: en raisonnant pour A, comme on a fait pour S, on voit que la somme due à la fin de la seconde année, ou au commencement de la troisième, après le remboursement b, est $Ap - b$.

Soit $Ap - b = B$: la somme due à la fin de la troisième année, ou au commencement de la quatrième année, sera pareillement $Bp - b$.

Continuant de même pour les années suivantes, et nommant C, D, E, F, etc., les sommes analogues à A et B : on aura, pour la fin des années 4.e, 5.e, 6.e, etc., après chaque remboursement b,

$$C = Bp - b,$$
$$D = Cp - b,$$
$$E = Dp - b,$$
$$F = Ep - b.$$

Ainsi de suite.

Maintenant, reprenons l'équation primitive $A = Sp - b$: au moyen de cette équation, et en éliminant B, C, D, E, F, etc., nous aurons les équations :

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Sp - b,$$
$$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Sp^2 - bp - b,$$
$$C = \ldots\ldots\ldots\ldots Sp^3 - bp^2 - bp - b,$$
$$D = \ldots\ldots\ldots Sp^4 - bp^3 - bp^2 - bp - b,$$
$$E = \ldots\ldots Sp^5 - bp^4 - bp^3 - bp^2 - bp - b,$$
$$F = \ldots Sp^6 - bp^5 - bp^4 - bp^3 - bp^2 - bp - b.$$

Ainsi de suite.

De sorte qu'à la fin de la n.me année, la somme due sera représentée par la suite :

$$Sp^n - b(p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots\ldots + 1),$$

expression dans laquelle le multiplicateur de b est la somme de tous les termes d'une progression géométrique, qui, étant prise à rebours, a 1 pour premier terme, n pour nombre de termes, et p^{n-1} pour dernier terme. D'où il résulte (184) que la somme de cette progression est $\frac{1-p^n}{1-p}$. Ainsi l'emprunteur devroit à la fin de n.me année, la somme $Sp^n - \frac{b(1-p^n)}{1-p}$; mais ço suppose qu'alors la dette s'éteint, il faut

quantité à zéro ; ce qui donnera l'équation demandée,

$$Sp^n - \frac{b(1-p^n)}{1-p} = 0,$$

$$\text{ou } Sp^{n+1} - (S+b)p^n + b = 0.$$

Par cette équation, on déterminera l'une quelconque des quatre quantités b, S, n, p, lorsque l'on connoîtra les trois autres.

En effet, 1.° si l'on connoît S, n, p, on aura b par l'équation du premier degré, $b = \frac{Sp^n(p-1)}{p^n-1}$.

2.° Si l'on connoît b, p, n, on connoîtra S par l'équation du premier degré, $S = \frac{b(p^n-1)}{p^n(p-1)}$.

3.° Si l'on connoît S, b, p, on trouvera n par les logarithmes, en observant que l'équation $Sp^{n+1} - (S+b)p^n + b = 0$, donne $p^n = \frac{b}{S-Sp+b}$.

Donc, $l.p^n = l.\frac{b}{S-Sp+b}$, ou $n\,l.p = l.b - l.(S-Sp+b)$; ou enfin,

$$n = \frac{l.b - l.(S-Sp+b)}{l.p}.$$

Les quantités S, b, p, doivent être prises telles qu'il résulte pour n un nombre entier, du moins à peu près.

4.° Si l'on connoît S, b, p, on ne pourra déterminer p que par la résolution d'une équation du degré $n+1$, où il n'y a d'autres puissances de p, que p^{n+1} et p^n. C'est sur quoi nous renvoyons à ce qui sera dit dans la suite concernant la résolution des équations élevées.

237. *Remarque.* Si les paiemens effectués à la fin de chaque année, n'étoient pas égaux on trouveroit (en nommant respectivement b, b', b'', b''', b^{iv}, etc. la suite de ces paiemens, et conservant d'ailleurs toutes les autres dénominations),

$$A = Sp - b,$$
$$B = Sp^2 - bp - b',$$
$$C = Sp^3 - bp^2 - b'p - b'',$$
$$D = Sp^4 - bp^3 - b'p^2 - b''p - b''',$$
$$E = Sp^5 - bp^4 - b'p^3 - b''p^2 - b'''p - b^{\text{iv}},$$
$$F = Sp^6 - bp^5 - b'p^4 - b''p^3 - b'''p^2 - b^{\text{iv}}p - b^{\text{v}}.$$

Ainsi de suite. Et la somme due à la fin de la n.me année seroit

$$Sp^n - (bp^{n-1} + b'p^{n-2} + b''p^{n-3} + b'''p^{n-4} + \text{etc.}).$$

Alors les paiements b, b', b'', b''', etc. étant assujétis à se succéder suivant une certaine loi donnée, la suite qui forme le second terme de l'expression précédente, se sommeroit en plusieurs cas : on en verra des exemples (chap. XXV).

Il y auroit plusieurs autres remarques à faire sur ce sujet; mais elles m'écarteroient trop de l'objet principal de ce traité.

CHAPITRE XII.

Des problêmes indéterminés du premier degré.

238. LORSQUE l'énoncé d'une question contient plus d'inconnues qu'on n'a de conditions à exprimer; alors, après avoir formé toutes les équations que ces conditions donnent, et après avoir éliminé les inconnues autant qu'il est possible, on arrive à une équation finale qui contient au moins deux inconnues. Ces deux inconnues ne peuvent être déterminées qu'en prenant l'une arbitrairement, et tirant ensuite de l'équation proposée la valeur de l'autre. Qu'on propose par exemple cette question : *Trouver deux nombres dont la somme augmentée d'une quantité donnée m soit quadruple de la somme qui résulte de l'addition de leur différence avec un nombre donné* n.

Il est clair qu'en nommant x et y les deux nombres cherchés, on a l'équation $x+y+m=4(x-y+n)$, ou bien $5y=3x+4n-m$, laquelle exprime tout l'état de la question et contient deux inconnues. Il faut donc se donner l'une des deux quantités x, y, pour parvenir à connoître l'autre. Si l'on suppose $m=4$, $n=5$, et qu'on prenne $x=2$, on trouvera $y=4\frac{2}{5}$; si, ayant toujours $m=4$, $n=5$, on faisoit $x=3$, on trouveroit $y=5$; ainsi des autres suppositions. On voit que, s'il est permis de prendre indifféremment pour x et y des nombres entiers ou rompus, positifs ou négatifs, le probléme admet une infinité de solutions; mais le nombre des solutions diminue lorsqu'on exige que les nombres x et y soient des nombres entiers positifs. Il en est de même de toutes les questions qui mènent à des équations indéterminées.

Nous supposerons dans tout le cours de ce chapitre que l'équation finale ne contienne que deux inconnues. Si elle en contenoit trois, on commenceroit par s'en donner une; si elle en contenoit quatre, on s'en donneroit deux, etc. Mais on doit prendre garde dans tous les cas que le choix ou la détermination d'une inconnue ne renferme aucune incompatibilité avec l'état de la question.

239. Toutes les équations indéterminées du premier degré à deux inconnues, peuvent être représentées par la formule $ax=by+c$, x et y étant les deux inconnues, a, b, c, des quantités données. En effet, puisque dans ces sortes d'équations les deux inconnues sont l'une et l'autre au premier degré, et qu'elles ne peuvent pas être mêlées ensemble, autrement (120) l'équation ne seroit pas du premier degré; il est évident qu'on peut représenter par une seule lettre a l'assemblage de toutes les quantités qui multiplient x, par une seule lettre b l'assemblage de toutes les quantités qui multiplient y, et enfin par une seule lettre c le résultat de tous les termes où les inconnues ne se trouvent point. On voit aussi qu'on peut mettre dans un membre de l'équation ou dans l'autre un terme quelconque, en affectant ce ter-

me du signe convenable. Soit, par exemple, l'équation $mx + \frac{px}{q} + gy + hy = k - 3f$; je mets cette équation sous la forme suivante, $\left(m + \frac{p}{q}\right)x = -(g+h)y + k - 3f$; alors elle se rapporte à la formule $ax = by + c$, en faisant $m + \frac{p}{q} = a$, $-(g+h) = b$, $k - 3f = c$. Il en sera de même de toutes les équations de pareille nature. Cela posé, entrons en matière.

240. Problème I. *Déterminer en général les inconnues* x *et* y, *de manière que leurs valeurs satisfassent à l'équation* ax = by + c.

1.° Il est évident que si on a le choix de prendre pour x et y des nombres quelconques positifs ou négatifs, entiers ou rompus, on peut satisfaire à l'équation proposée d'une infinité de manières; car si l'on donne à l'une des inconnues, par exemple à x, une suite quelconque de valeurs déterminées, et qu'on substitue successivement ces valeurs dans l'équation $ax = by + c$, on aura des équations déterminées, desquelles on tirera les valeurs de y, correspondantes chacune à chacune des valeurs de x.

2.° Si l'on exige que les deux nombres x et y soient positifs, il est clair d'abord que le problème est impossible, lorsque b et c sont des nombres positifs, et a un nombre négatif. Mais le problème est soluble, premièrement lorsque les nombres a, b, c, sont tous trois positifs, ou tous trois négatifs; car, quelque valeur positive qu'on donne à y, on aura aussi une valeur positive pour x: secondement, lorsque a et b étant positifs, c est négatif; car, en prenant pour x un nombre quelconque positif, on aura évidemment un nombre positif pour y: troisièmement, lorsque a et c sont positifs, et b négatif, pourvu qu'on donne à x une valeur positive telle que $c - ax$ soit aussi un nombre positif.

Je laisse aux lecteurs le soin d'examiner les condi[tions] qui devroient avoir lieu, si on demandoit que l'u[n des] deux nombres x, y, fût positif, l'autre négatif.

241. Problême II. *Satisfaire à l'équation* s = hu + k, *dans laquelle les nombres donnés* h *et* k *sont des entiers, de manière que* u *et* s *soient des nombres entiers positifs.*

1.° Le problême est impossible lorsque les nombres h et k sont tous deux négatifs.

2.° Si les nombres h et k sont l'un et l'autre positifs, il est clair qu'en faisant successivement $u=0$, $u=1$, $u=2$, $u=3$, etc., on aura pour s des valeurs correspondantes qui seront des nombres entiers positifs.

3.° Si l'un des deux nombres h et k est positif, l'autre négatif, il faudra qu'ils soient tels qu'en supposant $u=$ à un nombre entier positif n, la quantité $nh+k$ forme un résultat positif. Il y aura donc autant de solutions qu'on pourra prendre de nombres n qui remplissent cette condition. Le problême suivant est un cas particulier de cette espèce.

242. Problême III. *Faire* 360 *sous en* 22 *pièces; les premières de* 24 *sous, les secondes de* 12 *sous, et les troisièmes de* 6 *sous.*

Soient respectivement x, y, z, les nombres de pièces de 24 sous, de 12 sous, et de 6 sous. On aura d'abord l'équation $x+y+z=22$. De plus, il ~~est évident que~~ le nombre x des pièces de 24 sous donne $24x$ sous; celui y des pièces de 12 sous, $12y$ sous; celui z des pièces de 6 sous, $6z$ sous. Or la somme de ces trois nombres de sous doit être 360. On a donc cette seconde équation, $24x+12y+6z=360$.

Comme toutes les conditions de la question sont exprimées, et que nous avons trois inconnues et deux équations seulement, nous ne pouvons pas parvenir immédiatement à des valeurs déterminées de x, y, z. Mais si nous nous donnons l'une des trois inconnues, les autres seront nécessairement déterminées.

En effet, prenant, par exemple, la valeur de z dans la première équation, nous aurons $z=22-x-y$; et substituant cette valeur dans la seconde équation, il viendra $24x+12y+132-6x-6y=360$; d'où l'on tire

$y = 38 - 3x$. Mettant cette valeur de y dans l'équation $z = 22 - x - y$, on trouvera $z = 2x - 16$. D'où il suit qu'en donnant différentes valeurs a x on aura les valeurs correspondantes de y et de z. Or, suivant les conditions de la question, les nombres x, y, z, doivent être entiers, puisqu'il ne peut entrer de *demi*-pièce ou de *quart* de pièce, etc. dans la sbmme 360 sous. De plus, pour que ces mêmes nombres soient positifs, il faut que $38 - 3x$, et $2x - 16$, ne soient pas moindres que 1. La première condition exige que x, qui doit être un nombre entier, ne surpasse pas 12; et la seconde, que x vaille tout au moins 8. Les valeurs qu'on peut donner à x sont donc comprises entre les limites 12 et 8. Les valeurs correspondantes de y et de z se trouveront par les équations qui précèdent.

Exemples.
Soit $x = 12$, on aura $y = 2$, $z = 8$.
Soit $x = 11$, on aura $y = 5$, $z = 6$.
Soit $x = 10$, on aura $y = 8$, $z = 4$.
Soit $x = 9$, on aura $y = 11$, $z = 2$.
Soit $x = 8$, on aura $y = 14$, $z = 0$.

La dernière solution doit être rejetée, puisqu'elle exclut les pièces de 6 sous. Si on l'admettoit, on n'auroit que des pièces de 24 sous et de 12 sous pour former la somme 360 sous.

Ainsi la somme 360 sous étant composée de pièces de 24 sous, de 12 sous, et de 6 sous, le problême n'a que quatre solutions.

Ces mêmes solutions auroient pu être trouvées en commençant par déterminer y ou z la première, au lieu de commencer par x, comme nous avons fait. Car si l'on veut, par exemple, commencer par déterminer z, on aura, en vertu de la première équation fondamentale, $x = 22 - y - z$. Mettant cette valeur dans la seconde équation fondamentale, on aura $528 - 24y - 24z + 12y + 6z = 360$. Donc $y = 14 - \frac{3z}{2}$. Et (à cause de $x = 22 - y - z$), $x = 8 + \frac{z}{2}$.

Il est clair, par ces deux dernières équations, qu'en prenant z positivement, x sera toujours positif, et que y le sera aussi, pourvu que $14 - \frac{3z}{2}$ vaille tout au moins 1, ou que $28 - 3z$ vaille tout au moins 2. Cette dernière condition exige que z ne surpasse pas 8. De plus, pour que y et x soient des nombres entiers, il faut que z soit 2, ou un multiple de 2.

Supposons d'abord $z = 0$, on aura $y = 14$, $x = 8$. Cette solution est la même que la dernière des précédentes que nous avons vu qui doit être rejetée si l'on veut qu'il entre des pièces de 6 sous dans la somme 360.

Soit $z = 2$, on aura $y = 11$, $x = 9$.
Soit $z = 4$, on aura $y = 8$, $x = 10$.
Soit $z = 6$, on aura $y = 5$, $x = 11$.
Soit $z = 8$, on aura $y = 2$, $x = 12$.

On a donc les mêmes solutions que ci-dessus; et on les trouveroit également en commençant par déterminer y.

Le problème auroit un plus grand nombre de solutions, s'il étoit permis de prendre pour un ou deux des nombres x, y, z, des valeurs négatives; alors ces valeurs désigneroient que les nombres dont elles seroient les expressions devroient être pris dans un sens contraire à celui qui leur est attribué par l'énoncé de la question. Supposons, par exemple, $x = 15$, on aura $y = -7$, $z = 14$. La valeur négative de y signifie qu'il faut *retrancher* 7 pièces de 12 sous; de sorte que si les quantités 360 sous, x, z, représentent des *gains*, la quantité y représentera une *perte*. Ainsi on formera le nombre 360 sous en 22 gains effectifs, en employant 15 gains de 24 sous, 14 gains de 6 sous, et 7 pertes de 12 sous. La même remarque s'applique aux autres combinaisons qui donnent quelques valeurs négatives.

243. Problème IV. *Satisfaire à l'équation* $s = \frac{hu}{g} + k$, *dans laquelle* g, h, k, *sont des nombres entiers, et la fraction* $\frac{h}{g}$ *est réduite à ses moindres termes; de manière que* u *et* ... *es nombres entiers positifs.*

1.° Le problême est impossible lorsque k et la fraction $\frac{h}{g}$ sont tout-à-la-fois des nombres négatifs.

2.° Si k et la fraction $\frac{h}{g}$ sont des nombres positifs, il est clair qu'en faisant successivement $u=0$, $u=g$, $u=2g$, $u=3g$, etc., on aura pour s des entiers positifs. Le problême suivant se rapporte à ce cas.

3.° Si k et la fraction $\frac{h}{g}$ ont des signes différents, il faudra qu'en supposant $u=ng$ (n étant un nombre entier), la valeur de la quantité $nh+k$, qui sera évidemment un nombre entier, soit de plus positive. On verra un exemple de ce cas dans le problême VI.

244. Problême V. *Trouver un nombre entier qui, divisé par 53, donne 47 pour reste, et qui, divisé par 15, donne 2 pour reste.*

En nommant t le nombre cherché, x le premier quotient, y le second, et considérant que dans toute division le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste, on aura les deux équations $t=53x+47$, $t=15y+2$; et par conséquent $53x+47=15y+2$; d'où l'on tire $y=\frac{53x+45}{15}$, ou bien $y=\frac{53x}{15}+3$. Donc, si l'on fait d'abord $x=0$, on aura $y=3$, et conséquemment $t=47$: ce nombre est le moindre entier qui satisfasse aux conditions du problême. Si l'on fait $x=15$, on trouvera $t=842$, nombre qui, divisé par 53, donne 47 de reste, et qui, divisé par 15, donne 2 de reste : si l'on fait $x=2\times 15$, on trouvera $t=1637$, nombre qui satisfait aux mêmes conditions; ainsi de suite.

245. Problême VI. *Trouver deux nombres entiers positifs* x *et* y, *qui satisfassent à l'équation* $217-3x=31y$.

Cette équation donne $y=\frac{217-3x}{31}$, ou $y=7-\frac{3x}{31}$. Donc, si l'on fait d'abord $x=0$, on aura $y=7$; si l'on fait $x=31$, on aura $y=7-3=4$; si l'on fait $x=2\times 31$,

on aura $y = 7 - 6 = 1$. Il n'y a pas d'autres solutions possibles suivant les conditions du problême; car si l'on faisoit $x = 3 \times 31$ on auroit $y = -2$, nombre négatif; ce qui ne doit pas être.

246. Problême VII. *Satisfaire à l'équation* $ny = mx \pm p$, *dans laquelle les nombres* m, n, p, *sont des entiers positifs qui n'ont aucun diviseur commun; en prenant pour* x *et* y *les plus petits nombres entiers positifs qu'il est possible.*

J'observe d'abord que les nombres m et n doivent être premiers entre eux, afin que x et y puissent être des nombres entiers : car si m et n avoient un diviseur commun k, en sorte qu'on eût $m = kh$, $n = ki$ (k, h, i, étant des nombres entiers), on auroit $kiy = khx \pm p$, ou $iy = hx \pm \frac{p}{k}$. Or, puisque les trois nombres m, n, p, n'ont pas de diviseur commun, il s'ensuit que k ne divise pas p; donc le terme $\frac{p}{k}$ contient une fraction, laquelle étant jointe à un résultat de termes entiers, formeroit un assemblage qui ne seroit pas un nombre entier, et qui par conséquent ne pourroit pas être égal au premier membre iy qui est un nombre entier.

Cela posé, nous allons résoudre le problême séparément pour les deux cas.

1.er CAS. $ny = mx + p$.

Soit $m > n$. Si on avoit $m < n$, la question se rapporteroit au second cas, en changeant x en y, et réciproquement.

Les nombres m et n étant premiers entre eux, il est clair que si pour trouver leur plus grand commun diviseur, on divise (Arith. 119) m par n, ensuite n par le premier reste, le premier reste par le second, le second par le troisième, ainsi de suite; il est clair, dis-je, que le dernier reste diviseur sera 1, puisque m et n n'ont pas d'autre diviseur commun que 1. Supposons qu'en divisant m par n on ait a
ient, b pour reste; qu'en divisant n par b on
uotient, d pour reste; qu'en divisant b par d

on ait e pour quotient, f pour reste; ainsi de suite. D'un autre côté, supposons qu'en divisant p par n on ait α pour quotient, β pour reste; qu'en divisant β par b on ait γ pour quotient, δ pour reste; qu'en divisant δ par d on ait ι pour quotient, φ pour reste; ainsi de suite. Sur quoi il faut observer que si $p < n$, on aura $\alpha = 0$, $\beta = p$; ainsi des autres divisions. En conséquence de toutes ces suppositions, nous aurons :

$m = na + b$	$p = \alpha n + \beta$
$n = bc + d$	$\beta = \gamma b + \delta$
$b = ed + f$	$\delta = \iota d + \varphi$
etc.	etc.

Substituons pour m et p leurs valeurs dans l'équation proposée $ny = mx + p$, elle deviendra $ny = nax + bx + n\alpha + \beta$, ou $y = ax + \alpha + \frac{bx + \beta}{n}$. Or, dans cette dernière équation, le premier membre doit être un nombre entier positif le moindre possible; donc la totalité du second membre est aussi un nombre entier positif le moindre possible. Ainsi, puisque les termes $ax + \alpha$ sont des entiers positifs, la partie $\frac{bx + \beta}{n}$ doit être un nombre entier positif le moindre possible.

Soit $\frac{bx + \beta}{n} = s$; on aura $bx = ns - \beta$: mettons pour n et β leurs valeurs; nous aurons $bx = bcs + ds - \gamma b - \delta$; ou $x + \gamma = cs + \frac{ds - \delta}{b}$. Or, dans cette équation, le premier membre $x + \gamma$ doit être un nombre entier positif le moindre possible; et la partie cs du second membre est un entier positif; donc la partie $\frac{ds - \delta}{b}$ doit être un nombre entier positif le moindre possible.

Soit $\frac{ds - \delta}{b} = u$; on aura $ds = bu + \delta$, ou bien (en mettant pour b et δ leurs valeurs), $ds = edu + fu + \iota d + \varphi$, ou $s = eu + \iota + \frac{fu + \varphi}{d}$.

En raisonnant toujours de même, on voit que la partie $\frac{fu+\varphi}{d}$ doit être un nombre entier positif le moindre possible; on fera donc $\frac{fu+\varphi}{d}=z$, et on continuera d'opérer comme tout-à-l'heure; ainsi de suite pour les parties analogues des équations suivantes. Et comme le dernier des restes diviseurs b, d, f, etc. est 1, il est évident qu'on parviendra toujours à une équation finale de cette forme $t=Az\pm B$, laquelle se résout par la méthode de l'article 241. Ensuite on remontera aux valeurs des inconnues u, s, x, y.

Par exemple, supposons que le reste f soit 1; on fera $\frac{fu+\varphi}{d}=z$, nombre entier positif; ce qui donne (à cause de $f=1$), $u=dz-\varphi$, équation à laquelle on satisfera en prenant pour z le plus petit entier positif, qui donne pour u le plus petit entier positif. Connoissant z et u, on aura s par l'équation $s=\epsilon+eu+z$; connoissant u et s, on aura x par l'équation $x=cs-\gamma+u$; enfin, connoissant x, on aura y par l'équation $y=\alpha+ax+s$.

II. CAS. $ny=mx-p$.

Soit encore $m>n$. Si on avoit $m<n$, la question se rapporteroit au cas précédent, en changeant x en y, et réciproquement.

En conservant les suppositions de l'article précédent et mettant pour m et p leurs valeurs, l'équation $ny=mx-p$ deviendra $ny=nax+bx-\alpha n-\beta$, ou bien $y+\alpha=ax+\frac{bx-\beta}{n}$. Or, dans cette dernière équation le premier membre doit être un nombre entier positif le moindre possible; donc la totalité du second membre est aussi un nombre entier positif le moindre possible; et comme la partie ax est un nombre positif, l'autre partie $\frac{bx-\beta}{n}$ doit être aussi un nombre entier positif le moindre possible.

Soit $\frac{bx - \beta}{n} = s$; on aura $bx = ns + \beta$, ou bien (en mettant pour n et β leurs valeurs), $bx = bcs + ds + \gamma b + \delta$; ou $x = cs + \gamma + \frac{ds + \delta}{b}$. Donc $\frac{ds + \delta}{b}$ doit être un nombre entier positif le moindre possible.

Soit $\frac{ds + \delta}{b} = u$; on aura $ds = bu - \delta$, ou bien (en mettant pour b et δ leurs valeurs), $ds = edu + fu - \varepsilon d - \varphi$, ou $s + \varepsilon = eu + \frac{fu - \varphi}{d}$. Donc la partie $\frac{fu - \varphi}{d}$ doit être un nombre entier positif le moindre possible; ainsi de suite. Par où l'on voit, comme dans le cas précédent, que la question se réduira finalement au probléme de l'article 241.

247. Probléme VIII. *Trouver le plus petit nombre qui, divisé par* 28 *et* 19, *laisse* 8 *et* 10 *pour restes.*

Soit t le nombre cherché, x le premier quotient, y le second : on aura les deux équations $t = 28x + 8$, $t = 19y + 10$; et par conséquent $19y = 28x - 2$, équation qui se rapporte au second cas de l'article précédent.

Nous avons ici $m = 28$, $n = 19$; $p = 2$, $a = 1$, $b = 9$, $c = 2$, $d = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = 2$. Par conséquent il faudra s'arrêter à l'équation $ds = bu - \delta$, ou $s = 9u - 2$. D'où l'on voit que la moindre valeur positive et entière qu'on puisse donner à u est 1. Soit donc $u = 1$: on aura $s = 7$; $x = 2 \times 7 + 1 = 15$; $y = 1 \times 15 + 7 = 22$. Mettons pour x sa valeur dans l'équation $t = 28x + 8$, nous aurons $t = 428$, qui est le nombre cherché.

Ce probléme sert, dans le calendrier, à trouver la période victorienne, lorsque le cycle solaire est 8, et le cycle lunaire 10.

248. Probléme IX. *Trouver le plus petit nombre qui, divisé par* 28, 19, 13, *laisse* 8, 10, 7, *pour restes correspondants.*

Je cherche d'abord, comme dans le probléme précédent, le nombre qui satisfait aux deux premières conditions de

251. Problème XII. *Connoissant les premières valeurs des nombres* x *et* y *qui satisfont à l'équation générale* $ny \mp mx = p$, *trouver les autres valeurs qui peuvent satisfaire à la même équation.*

I.er CAS. $ny - mx = p$.

Je suppose que $x + a$ et $y + b$ représentent les secondes valeurs de x et de y. On aura l'équation $n(y + b) - m(x + a) = p$, ou bien $ny + nb - mx - ma = p$, de laquelle retranchant l'équation $ny - mx = p$, résulte $nb - ma = o$, ou $nb = ma$, et par conséquent $a:b :: n:m$.

De même, si l'on suppose que $x + a + c$, $y + b + d$, soient les troisièmes valeurs de x et de y, on aura $n(y + b + d) - m(x + a + c) = p$, dont retranchant $n(y + b) - m(x + a) = p$, reste $nd - mc = o$, et par conséquent $c:d :: n:m$; ainsi de suite.

Cela posé, comme on veut avoir toutes les valeurs possibles de x et de y, qui peuvent satisfaire à l'équation proposée, les accroissements a, b, c, d, etc. doivent être les moindres qu'il est possible. Or, puisqu'on a cette suite de proportions, $a:b :: n:m$, $c:d :: n:m$, etc., il est clair que la condition dont il s'agit sera remplie, si l'on fait chacun des accroissements a, c, etc. égal à n, et chacun des accroissements b, d, etc. égal à m, les nombres n et m étant supposés premiers entre eux. D'où il suit que les différentes valeurs de x composent une progression arithmétique croissante dont la différence est n, coëfficient de y, et que les différentes valeurs de y composent uue progression arithmétique aussi croissante, dont la différence est m, coëfficient de x. La première progression est donc

$$\div\ x \,.\, x + n \,.\, x + 2n \,.\, x + 3n \,.\ \text{etc.}$$

la seconde $\div\ y \,.\, y + m \,.\, y + 2m \,.\, y + 3m \,.$ etc.

II.e CAS. $ny + mx = p$.

En supposant que les secondes valeurs de x et de y sont $x + a$, $y + b$, que les troisièmes valeurs sont $x + a + c$, $y + b + d$, ainsi de suite, on trouvera par la même méthode que ci-dessus, $nb + ma = o$, $nd + mc = o$, etc.; ce

qui donne les proportions $a:-b::n:m$, ou $-a:b::n:m$; $c:-d::n:m$, ou $-c:d::n:m$, etc. D'où l'on voit que les nombres n et m étant supposés premiers entre eux, il faut, pour avoir toutes les valeurs possibles de x et de y, faire chacune des quantités a, c, etc. égale à n, et chacune des quantités b, d, etc. égale à m. Ainsi, comme parmi les premières quantités a, c, etc. l'une est positive, tandis que sa correspondante parmi les quantités b, d, etc. est négative, ou bien réciproquement; il s'ensuit que les valeurs de x composent une progression arithmétique croissante, dont la différence est n, tandis que les valeurs correspondantes de y composent une progression arithmétique décroissante, dont la différence est m; ou bien que les valeurs de x composent une progression arithmétique décroissante, dont la différence est n, tandis que les valeurs de y composent une progression arithmétique croissante, dont la différence est m. Les deux premières progressions sont donc,

$$\begin{cases} \div\, x \,.\, x+n \,.\, x+2n \,.\, x+3n \,.\ \text{etc.} \\ \div\, y \,.\, y-m \,.\, y-2m \,.\, y-3m \,.\ \text{etc.} \end{cases}$$

et les deux dernières sont,

$$\begin{cases} \div\, x \,.\, x-n \,.\, x-2n \,.\, x-3n \,.\ \text{etc.} \\ \div\, y \,.\, y+m \,.\, y+2m \,.\, y+3m \,.\ \text{etc.} \end{cases}$$

252. Problème XIII. *Trouver en combien de manières on peut faire* 50 *sous, avec des pièces de* 2 *sous, et des pièces de* 18 *deniers ou de* $\frac{3}{4}$ *sol.*

Soient x le nombre des pièces de 2 sous, y celui des pièces de $\frac{3}{4}$ de sou. Par le problème XI, la plus petite valeur de x est 1, et la valeur correspondante de y, qui est la plus grande possible, est 32. Ces deux premières valeurs de x et de y étant trouvées, on déterminera toutes les autres par le second cas du problème précédent. Les valeurs de x forment une progression arithmétique croissante, dont le premier terme est 1 et la différence 3, coëfficient de y dans l'équation $4x+3y=100$; tandis que les valeurs correspondantes de y forment une progression arithmé-

tique décroissante, dont le premier terme est 32, et la différence 4, coëfficient de x dans la même équation $4x + 3y = 100$; ou bien les valeurs de x forment une progression arithmétique décroissante, dont le premier terme est 1, la différence 3, tandis que les valeurs correspondantes de y forment une progression arithmétique croissante, dont le premier terme est 32, et la différence 4. Voici ces deux systèmes de progressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \div\ 1\ .\ 4\ .\ 7\ .\ 10\ .\ 13\ .\ 16\ .\ \text{etc.} \\ \div\ 32\ .\ 28\ .\ 24\ .\ 20\ .\ 16\ .\ 12\ .\ \text{etc.} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \div\ 1\ .\ -2\ .\ -5\ .\ -8\ .\ -11\ .\ -14\ .\ \text{etc.} \\ \div\ 32\ .\ 36\ .\ 40\ .\ 44\ .\ 48\ .\ 52\ .\ \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Ces deux systèmes satisfont au problème, et peuvent être également employés.

Lorsque les deux valeurs de x et de y, qui se combinent ensemble, l'une est positive, l'autre négative, elles doivent être prises en sens contraires. L'une exprimera, si l'on veut, un *gain*, et l'autre une *perte*. Par exemple, si l'on prend dans le second système le quatrième terme de chaque progression, on formera 50 sous de gain effectif, avec 44 gain de $\frac{1}{2}$ de sou, et 8 pertes de 2 sous. En effet, $50 = 44 \times \frac{1}{2} - 8 \times 2$.

253. Problème XIV. *Trouver tous les nombres qui, étant divisés par* 28, *donnent* 8 *de reste, et qui, étant divisés par* 19, *donnent* 10 *de reste.*

Ce problème est celui de l'article 247, proposé généralement. Or, nous avons formé dans cet article les équations $t = 28x + 8$, $t = 19y + 10$, $19y = 28x - 2$; et nous avons vu que les plus petits nombres qu'on puisse prendre pour x, y, t; sont 15, 22, 428.

Maintenant, l'équation $19y = 28x - 2$, ou $19y - 28x = -2$ se rapporte au premier cas du problème XII, en faisant $n = 19$, $m = 28$, $p = -2$. Ainsi les valeurs de x forment nne progression arithmétique croissante, dont le premier terme est 15, la différence 19; et les valeurs de y forment une progression arithmétique aussi croissante,

dont le premier terme est 22, et la différence 28. Voici ces deux progressions :

Pour x, $\div$ 15 . 34 . 53 . 72 . 91 . etc.
Pour y, $\div$ 22 . 50 . 78 . 106 . 134 . etc.

Les valeurs de x et de y étant trouvées, on aura celles de t par l'équation $t = 28x + 8$, ou par l'équation $t = 19y + 10$. La première valeur de t est 428; la seconde $428 + 19 \times 28$; la troisième $428 + 2 \times 19 \times 28$; la quatrième $428 + 3 \times 19 \times 28$; etc. D'où l'on voit que ces différentes valeurs composent une progression arithmétique croissante, dont le premier terme est 428, et la différence 28×19, ou 532.

On appliquera facilement la même méthode à toutes les questions de ce genre.

Les principaux auteurs qui ont écrit sur les problêmes indéterminés du premier degré sont Diophante, Bachet de Meziriac, Maclaurin, Saunderson, et Labottière dans un mémoire imprimé parmi les pièces présentées à l'académie des sciences, tome IV.

CHAPITRE XIII.

Des équations déterminées du second degré.

254. TOUTE équation déterminée du second degré peut être représentée par la formule $x^2 + px + q = 0$; x étant l'inconnue, p et q des quantités données, simples ou composées, positives ou négatives. Car, soit, par exemple, l'équation $ax^2 + b^2x + c^3 = k^3 - gh^2$: on commencera par faire passer le second membre dans le premier; ce qui donnera $ax^2 + b^2x + c^3 - k^3 + gh^2 = 0$; ensuite on divisera tout par a, coëfficient de x^2; et on aura $x^2 + \frac{b^2x}{a} + \frac{c^3 - k^3 + gh^2}{a} = 0$, équation qui se rapporte

à la formule $x^2+px+q=0$, en supposant $\frac{b^2}{a}=p$, $\frac{c^3-k^3+gh^2}{a}=q$.

Si on avoit $mx^2=kx^2+abx+h^3-frb$, on mettroit tout dans le premier membre, et on auroit $mx^2-kx^2-abx-h^3+frb=0$, ou bien $(m-k)x^2-abx-h^3+frb=0$; on diviseroit tout par $m-k$, coëfficient de x^2, et on auroit $x^2-\frac{abx}{m-k}-\frac{(h^3-frb)}{m-k}=0$, équation qui se rapporte à la formule $x^2+px+q=0$, en supposant $-\frac{ab}{m-k}=p$, $-\frac{(h^3-frb)}{m-k}=q$. Il en sera de même pour toutes les autres équations de ce degré. Ainsi le problême de la résolution des équations du second degré se réduit à savoir tirer de l'équation $x^2+px+q=0$, la valeur de l'inconnue x.

255. Comme les quantités p et q peuvent être tout ce qu'on voudra, j'observe 1.° que si l'on suppose $q=0$, on aura $x^2+px=0$; expression que l'on peut regarder ou comme le produit de $x=0$ par la quantité $x+p$, ou comme le produit de $x+p=0$ par la quantité x. Dans le premier cas, la valeur de l'inconnue x est zéro; dans le second, l'équation à résoudre est $x+p=0$, laquelle est du premier degré, et donne $x=-p$.

2.° Si l'on suppose $p=0$, le terme px s'évanouira, et on aura simplement $x^2+q=0$, ou bien $x^2=-q$. Donc, en tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $x=\pm\sqrt{-q}$, et par conséquent l'inconnue x sera déterminée. Je mets le double signe $\pm$ au devant de $\sqrt{-q}$, parce que, comme nous l'avons vu, l'une et l'autre quantité $+\sqrt{-q}$, et $-\sqrt{-q}$, étant multipliée par elle-même, donne également $-q$, ou x^2. On pourroit mettre aussi le double signe au devant de x; mais cela ne produiroit pas de résultat nouveau; car, si vous prenez $+x=\pm\sqrt{-q}$, cette expression est la même que celle qu'on a donnée ci-dessus; et si vous prenez $-x=\pm\sqrt{-q}$,

vous aurez, en changeant tous les signes, $x = \mp\sqrt{-q}$; ce qui revient encore au premier résultat.

On voit donc que l'inconnue a deux valeurs. Ces valeurs s'appellent les *racines* de l'équation, en ce sens que chacune d'elles étant mise tour à tour à la place de l'inconnue, la totalité des termes de l'équation se réduit à zéro par l'opposition de leurs signes; ou bien encore que l'équation $x^2 + q = 0$, peut être considérée comme le produit $(x - \sqrt{-q}) \times (x + \sqrt{-q}) = 0$. En effet, soit que vous mettiez dans l'équation $x^2 + q = 0$, à la place de x, le quarré de $+\sqrt{-q}$, ou celui de $-\sqrt{-q}$, vous aurez également $-q + q = 0$; et de même, si vous effectuez le produit indiqué $(x - \sqrt{-q}) \times (x + \sqrt{-q}) = 0$, vous trouverez $x^2 + q = 0$.

Lorsque la quantité q est négative, les deux valeurs de x, ou les deux racines de l'équation, sont réelles; car alors $-q$ est une quantité positive, dont la racine est réelle. Mais si la quantité q est positive, alors $-q$ est une quantité négative, dont la racine est impossible ou *imaginaire* (105).

Je passe au problême général où p et q ne sont plus zéro.

256. Problême I. *Résoudre l'équation générale* $x^2 + px + q = 0$.

Je transpose d'abord le terme $+q$; ce qui donne $x^2 + px = -q$; ensuite j'observe que, si on forme le quarré d'un binome tel que $x + h$, ce quarré est $x^2 + 2hx + hh$: d'où je vois, en le comparant terme à terme avec le premier membre de l'équation précédente, c'est-à-dire, en faisant $x^2 = x^2$, $2hx = px$, ou $h = \frac{p}{2}$; je vois, dis-je, que le premier membre en question deviendroit un quarré parfait, si on y ajoutoit le quarré de h ou de $\frac{p}{2}$, c'est-à-dire, le quarré de la moitié du coëfficient qui affecte l'inconnue dans le second terme de l'équation proposée. J'y ajoute donc ce quarré; et, pour que l'équa-

tion subsiste, je l'ajoute aussi au second membre : par là on aura $x^2 + px + \frac{pp}{4} = \frac{pp}{4} - q$, équation dont le premier membre est un quarré parfait, celui de $x + \frac{p}{2}$. Ainsi, tirant la racine quarrée de ce membre et indiquant celle du second, on aura

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)},$$

où l'inconnue x n'est plus qu'au premier degré ; en sorte que, transposant le terme $\frac{p}{2}$, on aura

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}, \text{ et } x \text{ sera dégagée.}$$

On voit qu'à cause du double signe qui affecte le radical, l'inconnue a deux valeurs, c'est-à-dire, que la totalité des termes de l'équation $x^2 + px + q = 0$ se réduira également à zéro, soit que pour x on mette $-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$, soit qu'on mette $-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$; ou que l'équation $x^2 + px + q = 0$ peut être considérée comme le produit

$$\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}\right) \times \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}\right) = 0,$$

ce qu'on peut vérifier en effectuant ce produit.

Lorsque la quantité $\frac{pp}{4} - q$ est positive, les deux valeurs de x, ou les deux racines de l'équation, sont réelles, puisque leurs parties $-\frac{p}{2}$ et $\sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$ sont réelles. Or, comme $\frac{pp}{4}$ est toujours positive, quel que soit le signe de p, il est clair que $\frac{pp}{4} - q$ est toujours positive lorsque q est négative. Au contraire, les deux racines de l'équation seront imaginaires, lorsque la quantité $\frac{pp}{4} - q$ sera négative, parce qu'alors la racine de cette quantité étant

imaginaire, si on la joint positivement ou négativement avec $-\frac{p}{2}$, elle rendra le tout imaginaire. Or, pour que $\frac{pp}{4}-q$ soit négative, il faut que q soit positive et que de plus on ait $\frac{pp}{4}<q$.

Si, dans la même hypothèse de q positive, on avoit $\frac{pp}{4}=q$, le radical s'évanouiroit, et les deux valeurs de x deviendroient égales, chacune étant $-\frac{p}{2}$; en effet l'équation $x^2+px+q=0$ devient, dans le cas présent, $xx+px+\frac{p^2}{4}=0$, ou $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$, ou $\left(x+\frac{p}{2}\right)\times\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$.

257. Problème II. *Trouver un nombre tel qu'étant ajouté trois fois à son quarré, la somme fasse 108.*

Soit x le nombre cherché : on aura l'équation $x^2+3x=108$. Ajoutons de part et d'autre le quarré de $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire, le quarré de la moitié du coëfficient du terme qui contient x; nous aurons $x^2+3x+\frac{9}{4}=108+\frac{9}{4}$, équation dont le premier membre est le quarré de $x+\frac{3}{2}$. Tirons donc la racine de chaque membre; nous aurons $x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{[108+\frac{9}{4}]}$, ou bien, en réduisant toute la quantité radicale au même dénominateur et effectuant l'addition, $x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{441}{4}}$. Or la fraction $\frac{441}{4}$ a pour racine exacte $\frac{21}{2}$. Ainsi on aura $x+\frac{3}{2}=\pm\frac{21}{2}$. D'où l'on tire ces deux valeurs, $x=9$, $x=-12$; ces deux valeurs résolvent également le problème. Car, si au quarré du nombre positif 9, qui est 81, on ajoute le triple du même nombre, qui est 27, la somme sera 108; et, si au quarré du nombre négatif -12, qui est 144, on ajoute le triple du même nombre, qui est -36, la somme sera $144-36$, ou 108.

258. *Remarque.* On voit par cet exemple un avantage de l'algèbre; c'est qu'une même équation donne non-seu-

lement la solution du problème particulier qu'on cherche à résoudre en la formant, mais encore la solution de tous les problèmes qui ont des conditions semblables. Ainsi, en proposant le problème précédent, on a pu n'avoir en vue que de trouver un nombre positif qui en remplit les conditions; mais l'équation $x^2+3x=108$ fait voir qu'on peut remplir également ces conditions en employant un nombre négatif.

259. Problème III. *Partager le nombre* 24 *en deux parties, telles que leur produit soit* 135.

Soit x la première partie de 24, et par conséquent $24-x$ la seconde. On aura l'équation $x(24-x)=135$, ou $x^2-24x=-135$. Ajoutons de part et d'autre le quarré de 12, moitié du coëfficient de x; nous aurons $x^2-24x+144=144-135=9$. Tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $x-12=\pm\sqrt{9}=\pm 3$, ce qui donne pour x ces deux valeurs, $x=15$, $x=9$. Dans le premier cas les deux parties du nombre 24 sont 15 et 9, et dans le second elles sont 9 et 15. Les deux cas se réduisent par conséquent à un seul.

260. Problème IV. *Un tonneau plein de liqueur a trois orifices* A, B, C; *il peut se vuider par les trois orifices ensemble en* 6 *heures; par l'orifice* B *seul il se vuideroit dans les trois quarts du temps qu'il mettroit à se vuider par* A *seul; et par* C *seul, dans un temps qui est plus grand de* 5 *heures que le temps par* B : *on demande en combien de temps le tonneau se vuidera par chacune de ces ouvertures séparément.*

La vitesse des écoulements est supposée uniforme et toujours la même dans tous les cas.

Représentons par T la totalité de la liqueur contenue dans le tonneau, et nommons x le nombre d'heures que le tonneau mettra à se vuider par l'orifice A seul. Le temps par B seul sera $\frac{3}{4}x$, et le temps par C seul sera $\frac{3}{4}x+5$. Or il est clair qu'en divisant T par chacun de ces temps, les quotients exprimeront les quantités de liqueur qui sortiroient pendant 1 heure par chacune des trois ouver-

tures proposées. Donc la quantité de liqueur qui sort pendant une heure par ces trois ouvertures à la fois est $\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}$; et la quantité qui sort pendant 6 heures par ces trois mêmes ouvertures est $6\left(\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}\right)$. Or, par hypothèse, cette dernière quantité est T. Ainsi on a l'équation, $6\left(\frac{T}{x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x}+\frac{T}{\frac{3}{4}x+5}\right)=T$, ou bien (en divisant tout par T), $6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x+5}\right)=1$; ou (en observant que $\frac{1}{x}=\frac{3}{3x}$, que $\frac{1}{\frac{3}{4}x}=\frac{4}{3x}$, que $\frac{1}{\frac{3}{4}x+5}=\frac{4}{3x+20}$), $6\left(\frac{7}{3x}+\frac{4}{3x+20}\right)=1$. Faisant disparoître les fractions, et réduisant, on trouvera $x^2-\frac{46}{3}x=\frac{840}{9}$. Ajoutant de part et d'autre le quarré de $\frac{23}{3}$, on aura $x^2-\frac{46}{3}x+\frac{529}{9}=\frac{1369}{9}$. Tirant la racine quarrée de part et d'autre, on aura $x-\frac{23}{3}=\pm\frac{37}{3}$, c'est-à-dire, $x=20$, ou $x=-\frac{14}{3}$.

Si on prend la première valeur de x, le temps par B, qui est $\frac{3}{4}x$, sera 15, et le temps par C, qui est $\frac{3}{4}x+5$, sera 20. Ainsi les trois temps cherchés seront 20 heures, 15 heures, 20 heures.

Si on emploie la seconde valeur $x=-\frac{14}{3}$, le temps par B sera $-\frac{7}{2}$, et le temps par C, $+\frac{3}{2}$. Alors les deux premiers temps étant négatifs, ils doivent être pris dans un sens contraire à celui qui leur est attribué par l'énoncé du problème. Ainsi, au lieu de supposer que pendant ces deux temps le tonneau *perd* de l'eau, il faut supposer qu'il en *reçoit*. La conséquence qu'on doit tirer de cette solution est que si le tonneau se vide en 6 heures en recevant de l'eau par les deux ouvertures A et B, tandis qu'il en perd par l'ouverture C, il s'emplira en $\frac{14}{3}$ d'heure par l'ouverture A seule; il s'emplira pareillement, en $\frac{7}{2}$ d'heure par l'ouverture B; et il se désemplira au contraire en $\frac{3}{2}$ d'heure par l'ouverture C seule.

261. Probléme V. *Trouver sur la ligne qui joint deux bougies* A *et* B *le point où elles éclairent également un même objet ; en supposant ce fait de physique que la clarté reçue par un objet est en raison inverse du quarré de sa distance au corps lumineux, c'est-à-dire, que la clarté à la distance* 1 *du corps lumineux, étant supposée exprimée par* 1, *la clarté à la distance* 2 *est quatre fois moindre, ou est exprimée par* $\frac{1}{4}$, *la clarté à la distance* 3 *est exprimée par* $\frac{1}{9}$; *ainsi de suite.*

Nommons a la distance des deux bougies; x la distance de l'objet éclairé à la plus forte bougie, que je suppose être A; et par conséquent $a-x$ sa distance à la seconde B, dans l'hypothèse qu'il soit placé entre les deux bougies. Supposons qu'à la distance donnée 1, la clarté donnée par A soit m, et que la clarté donnée par B soit n. Il suit du principe de physique dont nous avons parlé, qu'à la distance x la clarté donnée par la première bougie sera $\frac{1\times m}{x^2}$, et que la clarté donnée par la seconde à la distance $a-x$ sera $\frac{1\times n}{(a-x)^2}$. Or (hyp.) ces deux clartés doivent être égales ; on aura donc $\frac{m}{x^2}=\frac{n}{(a-x)^2}$. On pourroit résoudre cette équation en faisant disparoître les fractions et en la ramenant à la forme de l'article 256; mais on parviendra plus promptement à connoître x en tirant tout de suite la racine quarrée de chaque membre. Par là on aura $\frac{\sqrt{m}}{x}=\pm\frac{\sqrt{n}}{a-x}$, ou bien $(a-x)\sqrt{m}=\pm x\sqrt{n}$. Donc $x=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}\pm\sqrt{n}}$.

Comme on a supposé $m>n$, les deux valeurs de x sont positives, et doivent par conséquent être prises dans le sens de A vers B. De plus, si l'on emploie pour dénominateur $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, on aura $x<a$, et par conséquent le point cherché est placé entre les deux bougies, comme on l'a supposé en établissant le calcul. Si l'on emploie pour dénominateur $\sqrt{m}-\sqrt{n}$, on aura $x>a$; alors le

point demandé est placé par-delà B, et distant de A de la quantité $\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; sur quoi il faut observer qu'on auroit pu trouver ce point le premier, et l'autre le second, si, au lieu de poser l'équation $\frac{m}{x^2}=\frac{n}{(a-x)^2}$, on avoit posé l'équation $\frac{m}{x^2}=\frac{n}{(x-a)^2}$, relative au cas dont il s'agit, équation qui donne $x=\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}\mp\sqrt{n}}$.

Si on avoit $m=n$, ou que les deux bougies fussent égales, on auroit $\frac{a}{2}$ pour l'une des valeurs de x, ce qui satisfait évidemment au problême, et $\frac{a\sqrt{m}}{0}$ pour une autre valeur. Cette seconde valeur est infinie, parce qu'une quantité finie, telle que $a\sqrt{m}$, étant divisée par zéro qu'on peut regarder comme une quantité infiniment petite, donne un quotient infiniment grand. En ce cas l'objet éclairé est placé à une distance infinie des deux bougies, ce qui satisfait encore au problême; car la distance a des deux bougies étant finie, cette distance doit être regardée comme nulle par rapport à $\frac{a\sqrt{m}}{0}$: d'où il suit que l'objet peut être censé également éloigné des deux bougies égales, et qu'il est par conséquent également éclairé par chacune d'elles.

262. Problême VI. *Connoissant la somme et la différence des quarrés des deux nombres, trouver ces deux nombres.*

Soient x et y les deux nombres cherchés; a^2 la somme de leurs quarrés; b^2 la différence de leurs quarrés : on aura les deux équations $x^2+y^2=a^2$, $x^2-y^2=b^2$, lesquelles étant ajoutées ensemble, puis soustraites l'une de l'autre, donneront $2x^2=a^2+b^2$, $2y^2=a^2-b^2$. Divisant tout par 2 et tirant les racines quarrées, il nous viendra $x=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}}$.

Par exemple, soient $a^2 = 98$, $b^2 = 33$: on trouvera

$$x = \pm \sqrt{\frac{131}{2}},\ y = \pm \sqrt{\frac{65}{2}}.$$

263. Problème VII. *Connoissant la somme de deux nombres et celle de leurs quarrés, trouver ces deux nombres.*

Soient x et y les deux nombres cherchés, a leur somme, bb la somme de leurs quarrés; on aura les deux équations: $x+y=a$, $xx+yy=bb$. La première donne $y=a-x$, et $yy=aa-2ax+xx$. Substituant cette valeur de yy dans la seconde, on aura $xx+aa-2ax+xx=bb$, ou bien $2xx-2ax=bb-aa$, ou bien $x^2-ax=\frac{bb-aa}{2}$; d'où l'on tire $x=\frac{a\pm\sqrt{(2bb-aa)}}{2}$; et (à cause de $y=a-x$), $y=\frac{a\mp\sqrt{(2bb-aa)}}{2}$.

Supposons, par exemple, $a=7$, $b=5$; on aura $x=\frac{7\pm1}{2}$, $y=\frac{7\mp1}{2}$, c'est-à-dire, $x=4$, $y=3$, ou bien $x=3$, $y=4$.

Pour second exemple supposons $a=20$, $b=12$, ou $bb=144$; on aura $x=10\pm\sqrt{-28}$, $y=10\mp\sqrt{-28}$. Or la partie radicale $\pm\sqrt{-28}$ est imaginaire; et cette partie, jointe avec le nombre 10, rend le tout imaginaire. Ainsi les deux valeurs de x et de y sont imaginaires. Il est donc impossible ou il est absurde de supposer que la somme de deux nombres fasse 20, et la somme de leurs quarrés 144. Cette absurdité, qui ne saute pas aux yeux, est mise en évidence par le calcul; et c'est là un avantage précieux de l'algèbre : elle ne se borne pas à donner la solution d'une question dans les cas où cette question est possible, elle fait encore connoître les cas où une question est impossible; car alors la traduction algébrique du problême mène à des résultats absurdes.

On demandera peut-être comment dans le second exemple la valeur de x étant imaginaire, le second membre de l'équation $xx-20x=-128$, qu'on trouve alors, est néanmoins une quantité réelle. Cela arrive, parce que les parties imaginaires qui entrent dans le premier membre

se détruisent mutuellement par l'opposition des signes qui les affectent. En effet, puisque $x = 10 \pm \sqrt{-28}$, on aura $x^2 = 100 - 28 \pm 20\sqrt{-28}$, $-20x = -200 \mp 20\sqrt{-28}$; et par conséquent, $x^2 - 20x = 100 - 28 - 200 \pm 20\sqrt{-28} \mp 20\sqrt{-28}$; ce qui se réduit à -128. La même remarque a lieu pour y.

On voit en même temps par là que les racines imaginaires vont toujours *deux* à *deux*; car la racine quarrée indiquée de -28 est également $\pm\sqrt{-28}$; le double signe indique deux racines.

264. Problème VIII. *Résoudre l'équation* $n^2 + \frac{(2a-d)n}{d} - \frac{2s}{d} = 0$, *trouvée* (162, Quest. IX).

Cette question consiste à trouver dans une progression arithmétique le nombre des termes et le dernier terme, lorsqu'on connoît le premier terme, la différence et la somme de la progression. Or, pour résoudre l'équation proposée, je transpose d'abord le terme $-\frac{2s}{d}$, et j'ai $n^2 + \frac{(2a-d)n}{d} = \frac{2s}{d}$; d'où l'on tire (256), $n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \frac{\sqrt{((2a-d)^2 + 8ds)}}{2d}$.

Par exemple, supposons $a = 3$, $d = 2$, $s = 80$; on aura $2a - d = 4$, $8ds = 1280$, $(2a-d)^2 + 8ds = 1296$, dont la racine quarrée est 36. Donc $n = -\frac{4}{4} \pm \frac{36}{4}$. Il faut prendre seulement le signe + qui affecte le dernier terme, parce que le nombre cherché n est positif; on aura donc $n = \frac{36-4}{4} = \frac{32}{4} = 8$.

On résoudra semblablement l'équation relative à la question X du même article.

265. Problème IX. *Connoissant la somme de trois nombres qui sont en progression géométrique, et la somme de leurs quarrés; trouver ces trois nombres.*

Soient x, y, z, les trois nombres cherchés; a leur

somme, bb celles de leurs quarrés. On aura par les conditions du problême les trois équations suivantes, dont la troisième est fondée sur la proportion continue $\div x:y:z$, qui a lieu entre les trois nombres, $x+y+z=a$, $xx+yy+zz=bb$, $xz=yy$.

Tirons de la première, $z=a-x-y$, et mettons cette valeur dans les deux autres; nous trouverons ces deux-ci, $2xx+2yy+aa-2ax-2ay+2xy=bb$, $ax-xx-xy=yy$, qui ne contiennent plus que les deux inconnues x et y. Je tire de chacune de ces deux équations une valeur de x. La première me donne

$$xx-(a-y)x=\frac{bb-aa-2yy+2ay}{2},$$

et par conséquent,

$$x=\frac{a-y}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{bb-aa-2yy+2ay}{2}+\frac{(a-y)^2}{4}\right]}.$$

La seconde me donne $xx-(a-y)x=-yy$,

et par conséquent, $x=\frac{a-y}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{(a-y)^2}{4}-yy\right]}$.

Or $x=x$. Ainsi on aura, en effaçant la quantité $\frac{a-y}{2}$, qui est la même dans les deux membres,

$$\pm\sqrt{\left[\frac{bb-aa-2yy+2ay}{2}+\frac{(a-y)^2}{4}\right]}=\pm\sqrt{\left[\frac{(a-y)^2}{4}-yy\right]}.$$

Elevant chaque membre au quarré, faisant les réductions et dégageant y, on trouvera $y=\frac{aa-bb}{2a}$. Mettant cette valeur de y dans l'équation $x=\frac{a-y}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{(a-y)^2}{4}-y^2\right]}$; nous trouverons $x=\frac{aa+bb\pm\sqrt{(10a^2b^2-3a^4-3b^4)}}{4a}$.

Enfin, substituons les valeurs de x et de y dans l'équation $z=a-x-y$; et nous aurons

$$z=\frac{aa+bb\mp\sqrt{(10a^2b^2-3a^4-3b^4)}}{4a}.$$

266. *Remarque.* On auroit pu parvenir aux mêmes valeurs de x, y, z d'une manière plus simple; car, si après

avoir trouvé les deux équations, $2xx + 2yy + aa - 2ax - 2ay + 2xy = bb$, $ax - xx - xy = yy$, on multiplie la seconde par 2; qu'on l'ajoute avec la première, et qu'on efface les termes qui se détruisent par l'opposition des signes, on trouvera $y = \frac{aa - bb}{2a}$. Le reste du calcul s'achève comme tout-à-l'heure.

267. *Scholie.* Il y a dans les degrés supérieurs au second une classe très-étendue d'équations qui se résolvent par la méthode du second degré. Ces équations peuvent être comprises sous la forme générale $x^{2m} + px^m + q = 0$; x étant l'inconnue, p et q des quantités connues, m un nombre entier positif; et l'exposant de x dans le premier terme est double, comme on voit, de l'exposant de la même lettre dans le second terme. En effet, si l'on suppose $x^m = z$, (z étant une nouvelle inconnue), l'équation $x^{2m} + px^m + q = 0$ deviendra celle-ci, $z^2 + pz + q = 0$, qui est du second degré, et de laquelle on tire $z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$. Connoissant z, on aura x en tirant la racine m de z.

Supposons, par exemple, $m = 2$, ou qu'on ait l'équation du quatrième degré $x^4 + px^2 + q = 0$, on fera $xx = z$; et on trouvera z ou $x^2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$. Donc, en tirant la racine quarrée, $x = \pm \sqrt{\left[-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}\right]}$. L'inconnue a, comme on voit, quatre valeurs.

Pour second exemple soit $m = 3$, ou qu'on ait l'équation du sixième degré $x^6 + px^3 + q = 0$: on fera $x^3 = z$, et ayant trouvé d'abord z ou $x^3 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$, on tirera la racine cube, et on aura $x = \sqrt[3]{\left[-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}\right]}$. Nous verrons ci-dessous qu'une équation de cette forme $x^3 = M$, a trois racines, et par conséquent dans notre équation $x^6 + px^3 + q = 0$, l'inconnue x a six valeurs.

CHAPITRE XIV.

Des problèmes indéterminés du second degré.

268. Supposons qu'on ait entre les deux inconnues x et y et des quantités données, une équation du second degré ; il est facile de satisfaire à cette équation, lorsqu'il est permis de prendre pour x et y des nombres entiers ou rompus, positifs ou négatifs, rationnels ou radicaux. Car, en se donnant arbitrairement l'un de ces deux nombres, il ne s'agit plus pour avoir l'autre que de résoudre, par le chapitre précédent, une équation déterminée du second degré. Mais si on demande, ou que les nombres x et y soient des entiers, ou qu'étant fractionnaires ils soient au moins rationnels, le problème est quelquefois difficile ; souvent même il n'est pas soluble. Les principales règles pour le résoudre, lorsque la chose est possible, en nombres rationnels, consistent à exprimer les inconnues par le moyen des quantités données qu'il contient, et d'une nouvelle inconnue qu'il faut choisir tellement que, dans les équations qu'on forme ainsi, les inconnues qu'on cherche ne soient élevées qu'à la première puissance, et qu'il ne s'agisse par conséquent, pour les déterminer, que de résoudre une équation du premier degré. On entendra mieux cette théorie par des exemples que par des préceptes généraux et abstraits.

269. Problème I. *Trouver deux nombres rationnels dont la somme soit à celle de leurs quarrés en raison constante de* m *à* n.

Soient x et y les deux nombres cherchés : on aura la proportion $x+y : xx+yy :: m : n$; ce qui donne l'équation indéterminée du second degré, $nx+ny=mx^2+my^2$.

Je prends une nouvelle inconnue z, telle que l'on ait $y=zx$; et ce qui me dirige dans ce choix, c'est qu'en

mettant cette valeur de y dans l'équation $nx + ny = mxx + myy$ du problême, je pourrai diviser tous les termes par x, et par là je n'aurai plus que des équations du premier degré à résoudre. En effet, la substitution dont je viens de parler donne $nx + nxz = mxx + mx^2z^2$; ou bien (en divisant tout par x), $n + nz = mx + mxz^2$; d'où l'on tire $x = \frac{n + nz}{m + mz^2}$; et (à cause de $y = xz$), $y = \frac{nz + nz^2}{m + mz^2}$. Ces valeurs de x et de y font voir qu'en prenant pour z tel nombre rationnel qu'on voudra, x et y seront aussi des nombres rationnels.

Supposons, par exemple, $m = 1$, $n = 2$, $z = 1$; on trouvera, $x = 2$, $y = 2$. Soient $m = 1$, $n = 4$, $z = 2$; on trouvera, $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{24}{5}$. Soient $m = 1$, $n = 3$, $z = 4$; on trouvera, $x = \frac{15}{17}$, $y = \frac{60}{17}$.

270. Problême II. *Partager un quarré donné en deux autres quarrés.*

Soient aa le quarré donné, x et y les racines des deux quarrés cherchés; on aura l'équation $xx + yy = aa$. Je prends une nouvelle inconnue z, telle que l'on ait $y = a - zx$, ou $y = zx - a$, afin qu'élevant chaque membre au quarré, et puis substituant pour yy sa valeur dans l'équation fondamentale, les termes qui contiennent aa dans chaque membre se détruisent mutuellement, et qu'en conséquence l'équation s'abaisse au premier degré. Effectivement, par la substitution de $aa - 2azx + z^2x^2$ à la place de y^2, on a $xx + aa - 2azx + z^2x^2 = aa$; et par conséquent, en effaçant aa de part et d'autre, $xx - 2azx + z^2x^2 = 0$, ou encore $x(x - 2az + z^2x) = 0$. De là on tire, 1.° $x = 0$, et conséquemment $y = a$; cette solution satisfait au problême. 2.° $x = \frac{2az}{1 + z^2}$; donc, si l'on a pris $y = a - zx$, on aura $y = \frac{a(1 - z^2)}{1 + z^2}$; et si l'on a pris $y = zx - a$, on aura $y = \frac{a(z^2 - 1)}{1 + z^2}$. Cette solution donne, pour x et y, des nombres rationnels. c'est véritablement celle qu'on cherchoit.

Soit, par exemple, $aa = 25$, ou $a = 5$, et prenons $z = 3$; on trouvera d'abord $x = 3$; et mettant pour z et a leurs valeurs dans l'équation $y = \frac{a(z^2 - 1)}{1 + z^2}$, on aura $y = 4$. Soient $a = 6$, $z = 2$; on trouvera, $x = \frac{24}{5}$, $y = \frac{18}{5}$.

271. Problème III. *Trouver deux quarrés dont la différence soit égale à un quarré donné.*

Soient aa le quarré donné, x et y les racines des quarrés cherchés; on aura (en supposant $y > x$), $yy - xx = aa$. Je fais $y = a + zx$, et par conséquent $yy = aa + 2azx + z^2x^2$. Ainsi l'équation précédente devient, en effaçant ce qui se détruit, $2azx + z^2x^2 - x^2 = 0$, ou bien $x(2az + z^2x - x) = 0$. D'où l'on tire, 1.° $x = 0$, $y = a$. 2.° $x = \frac{2az}{1 - z^2}$, $y = \frac{a(1 + z^2)}{1 - z^2}$. On voit qu'il faut prendre pour z des nombres moindres que 1, si l'on veut que les nombres x et y soient positifs.

Soient $a = 4$, et prenons $z = \frac{1}{3}$; on trouvera, $x = 3$, $y = 5$.

272. Problème IV. *Trouver deux nombres tels qu'en ajoutant le quarré de l'un avec le produit du quarré de l'autre, par un nombre donné* b, *la somme soit égale à un quarré donné* aa.

Soient x et y les deux nombres cherchés; on aura l'équation $xx + by^2 = aa$. Je fais $x = a - zy$, ou $x = zy - a$; et par conséquent $xx = aa - 2azy + z^2y^2$. Mettant cette valeur dans l'équation précédente, et effaçant ce qui se détruit, on aura, $y(z^2y - 2az + by) = 0$. D'où l'on tire, 1.° $y = 0$, et conséquemment $x = a$. 2.° $y = \frac{2az}{b + z^2}$, et conséquemment $x = \pm \frac{a(b - z^2)}{b + z^2}$. En prenant pour z tel nombre rationnel qu'on voudra, on aura aussi pour x et y des nombres rationnels.

Si l'on prend b négativement, les formules précédentes donneront la solution du problème où l'on demanderoit deux quarrés tels qu'en retranchant de l'un le produit de

l'autre par un nombre donné, le reste fût égal à un quarré donné.

273. Problême V. *Trouver deux nombres tels qu'en retranchant du quarré de l'un le produit du quarré de l'autre par le quarré d'un nombre donné* b, *le reste soit égal à un nombre donné* a.

Soient x et y les deux nombres cherchés ; on aura l'équation $xx - b^2y^2 = a$. Je fais $x = z - by$, et par conséquent, $xx = zz - 2bzy + b^2y^2$. Mettant cette valeur dans l'équation précédente, et effaçant ce qui se détruit, on aura $zz - 2bzy = a$. Donc $y = \frac{zz - a}{2bz}$, et $x = \frac{zz + a}{2z}$.

274. Problême VI. *Partager la somme de deux quarrés en deux autres quarrés.*

Soient aa et bb les deux quarrés donnés, xx et yy les deux quarrés cherchés ; on aura $xx + yy = aa + bb$. Je prends deux nouveaux nombres z et u, tels que l'on ait $x = a - z$, $y = zu - b$; et par conséquent, $xx = aa - 2az + zz$, $yy = z^2u^2 - 2bzu + bb$. Mettant ces valeurs de xx et yy dans l'équation fondamentale, et effaçant ce qui se détruit, on aura $-2az + zz + z^2u^2 - 2bzu = 0$. D'où l'on tire, 1.° $z = 0$; ce qui donneroit, $x = a$, $y = -b$. 2.° $z = \frac{2a + 2bu}{1 + uu}$. Donc, $x = \frac{auu - a - 2bu}{1 + uu}$, et $y = \frac{2au + bu^2 - b}{1 + uu}$. Donc, en prenant pour u un nombre rationnel quelconque, on aura aussi pour x et y des nombres rationnels.

275. Problême VII. *Etant donnée l'équation générale du second degré,*

$$at^2 + btx + cx^2 + dt + ex + f = 0,$$

dans laquelle a, b, c, d, e, f *sont des entiers donnés,* t *et* x *des nombres inconnus : on propose de satisfaire à cette équation en prenant pour* t *et* x *des nombres rationnels.*

Je tire de l'équation proposée la valeur de l'une des inconnues, de t, par exemple ; et j'ai

$$t = -\frac{(bx + d) \pm \sqrt{[(bx + d)^2 - 4a(cx^2 + ex + f}}{2a}$$

Il est évident que x étant supposé un nombre rationnel, t en sera aussi un, si l'on parvient à faire en sorte que la quantité affectée du signe radical devienne un quarré parfait, dont on puisse par conséquent tirer la racine quarrée. Or cette quantité développée est $b^2x^2 + 2bdx + dd - 4acx^2 - 4aex - 4af$. Faisons, pour abréger, les quantités données $b^2 - 4ac = g$, $2bd - 4ae = h$, $dd - 4af = k$. Nous aurons la transformée, $t = -\frac{(bx+d) \pm \sqrt{[gx^2 + hx + k]}}{2a}$; et la question sera de satisfaire à l'équation $yy = gx^2 + hx + k$, en prenant pour x et y des nombres rationnels.

Il peut arriver que les quantités g, h, k, aient entre elles des relations telles qu'il soit impossible qu'en prenant pour x un nombre rationnel, y en soit aussi un; mais voici du moins un grand nombre de cas où cette condition peut être remplie.

1.° Soit $k = 0$, et par conséquent $yy = gx^2 + hx$. En faisant $gx^2 + hx = x^2z^2$, on aura $x = \frac{h}{z^2 - g}$, nombre rationnel, et $y = \frac{hz}{z^2 - g}$, nombre également rationnel; le nombre z étant supposé rationnel : de plus ce nombre z pourra être pris tel que x et y soient des nombres positifs.

2.° Soit g un quarré parfait que je nomme mm, h et k étant tout ce qu'on voudra; on aura $yy = mmxx + hx + k$. Je fais $\sqrt{[mmxx + hx + k]} = mx + z$; d'où l'on tire $x = \frac{zz - k}{h - 2mz}$, nombre rationnel, et $y = \frac{m(zz - k)}{h - 2mz} + z = \frac{hz - mzz - mk}{h - 2mz}$, nombre également rationnel.

3.° Soit k un quarré parfait que je nomme nn, g et h étant tout ce qu'on voudra; on aura $yy = gx^2 + hx + nn$. Je fais $\sqrt{[gx^2 + hx + nn]} = xz + n$; d'où l'on tire $x = \frac{h - 2nz}{z^2 - g}$, nombre rationnel, et $y = \frac{hz - gn - nzz}{z^2 - g}$, nombre également rationnel.

4.° Les valeurs de x et de y sont assignables en nombres rationnels, lorsque $h^2 - 4kg$ est un quarré parfait. En effet, cherchons en général les deux facteurs de la quantité $gx^2 + hx + k$, en la regardant comme le premier membre d'une équation du second degré qui a zéro pour second membre. Nous trouverons, $x = -\frac{h}{2g} \pm \frac{\sqrt{(h^2-4kg)}}{2g}$; et par conséquent, $gx^2 + hx + k = \left(gx + \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{(h^2-4kg)}}{2}\right) \times \left(x + \frac{h}{2g} + \frac{\sqrt{(h^2-4kg)}}{2g}\right)$, comme cela est d'ailleurs aisé à vérifier par la multiplication. D'où l'on voit que $h^2 - 4kg$ étant supposé un quarré que je nomme pp, et faisant pour abréger $\frac{h}{2g} - \frac{p}{2g} = q$, $\frac{h}{2g} + \frac{p}{2g} = r$, on aura $gx^2 + hx + k = (gx + gq) \times (x + r)$, expression dans laquelle il n'entre que des nombres rationnels.

Maintenant, je fais $\sqrt{(gx^2 + hx + k)}$, ou $\sqrt{[(gx + gq) \times (x + r)]} = z(gx + gq)$; ce qui donne, $(gx + gq) \cdot (x + r) = z^2 (gx + gq)^2$, ou $x + r = z^2 (gx + gq)$, et par conséquent $x = \frac{gqz^2 - r}{1 - gzz}$, nombre rationnel. Donc, $y = z(gx + gq) = \frac{gqz - grz}{1 - gzz}$, nombre également rationnel.

5.° On peut assigner x et y en nombres rationnels, lorsque la quantité $gx^2 + hx + k$ peut être regardée comme la somme d'un quarré et d'un produit composé de facteurs rationnels; c'est-à-dire, lorsqu'elle est réductible à cette forme, $(mx + l)^2 + (\alpha x + \beta) \times (\delta x + \epsilon)$. Car alors, en faisant $\sqrt{(gx^2 + gh + k)}$, ou $\sqrt{[(mx + l)^2 + (\alpha x + \beta) \cdot (\delta x + \epsilon)]} = mx + l + z(\alpha x + \beta)$, on a $(mx + l)^2 + (\alpha x + \beta) \times (\delta x + \epsilon) = (mx + l)^2 + 2(mx + l) z (\alpha x + \beta) + z^2 (\alpha x + \beta)^2$; d'où l'on tire, $x = \frac{2lz + \beta zz - \epsilon}{\delta - 2mz - \alpha zz}$, nombre rationnel. On aura également pour y un nombre rationnel, puisque $y = mx + l + z(\alpha x + \beta)$.

Nos lecteurs s'exerceront à appliquer ces formules générales à des exemples particuliers.

276. Probléme VIII. *Un homme achète deux sortes de vins, l'un du prix* a *par pinte, l'autre du prix* b; *il paie pour le tout un prix exprimé par un quarré inconnu, auquel ajoutant un nombre donné* d, *la somme est un nombre quarré dont la racine est le nombre total des pintes : on demande combien il y a de pintes du prix* a, *et combien du prix* b.

Nommons t le nombre total des pintes, u le nombre des pintes du prix b, et par conséquent $t-u$ celui des pintes du prix a. Il est clair que le prix des pintes dont chacune vaut b, est bu, et celui des pintes dont chacune vaut a, est $at-au$. Soit xx le quarré inconnu qui exprime le prix total; on aura d'abord l'équation $xx=bu+at-au$. Mais, d'un autre côté, on a $\sqrt{[xx+d]}=t$, ou bien $xx=tt-d$. Donc, en égalant entre elles les deux valeurs de xx, on aura $bu+at-au=tt-d$. Supposons $a>b$; on raisonneroit de même, si a étoit $<b$. L'équation $bu+at-au=tt-d$ donne $u=\frac{at-(tt-d)}{a-b}$, et $t-u=\frac{tt-d-bt}{a-b}$.

Comme $tt-d$ doit être un nombre quarré, j'exprime sa racine par $z-t$, ou par $t-z$; ce qui me donne $tt-2tz+zz=tt-d$, et par conséquent $t=\frac{zz+d}{2z}$. Ainsi, en prenant pour z un nombre rationnel, on aura aussi pour t un nombre rationnel. Mais il faut observer que ce choix doit être fait de manière que u et $t-u$ soient des nombres positifs.

La première condition exige qu'on ait $\frac{at-(tt-d)}{a-b}>0$, ou (en multipliant chaque membre par $a-b$), $at-(tt-d)>0$, ou $tt-d-at<0$, ou $tt-at<d$, ou $tt-at+\frac{aa}{4}<d+\frac{aa}{4}$, ou (en tirant la racine quarrée de part et d'autre), $t-\frac{a}{2}<\sqrt{\left[d+\frac{aa}{4}\right]}$, ou enfin, $t<\frac{a}{2}+\sqrt{\left[d+\frac{aa}{4}\right]}$.

La seconde condition exige qu'on ait $\frac{tt-d-bt}{a-b}>0$, ou $tt-d-bt>0$, ou $tt-bt>d$, ou $tt-bt+\frac{bb}{4}>d+\frac{bb}{4}$, ou (en tirant la racine quarrée de part et d'autre), $t-\frac{b}{2}>\sqrt{\left[d+\frac{bb}{4}\right]}$, ou enfin, $t>\frac{b}{2}+\sqrt{\left[d+\frac{bb}{4}\right]}$.

Ainsi il faut prendre t ou $\frac{zz+d}{2z}$ entre les deux limites qu'on vient d'assigner. Ayant t on substituera sa valeur dans les expressions de u et de $t-u$; et on aura les nombres de pintes des deux sortes de vins.

Par exemple, supposons $a=8$, $b=5$, $d=60$; on aura, $t<4+\sqrt{76}$, et $t>\frac{5+\sqrt{265}}{2}$. Prenons le nombre quarré immédiatement inférieur à 76, et le nombre quarré immédiatement supérieur à 265 : ces deux quarrés sont 64 et 289, et leurs racines sont 8 et 17. On aura, $4+\sqrt{64}=12$, et $\frac{5+\sqrt{289}}{2}=\frac{22}{2}=11$: d'où l'on voit que les limites de t en nombres entiers sont 12 et 11. Nous aurons donc, $\frac{zz+60}{2z}<12$, et $\frac{zz+60}{2z}>11$; d'où l'on tire, $z<12+\sqrt{84}$, et $z>11+\sqrt{61}$. Prenons le quarré 81 immédiatement inférieur à 84, et le quarré 64 immédiatement supérieur à 61 ; nous verrons que les limites de z sont entre 21 et 19. En faisant $z=20$, on trouvera, $t=\frac{23}{2}$, $u=\frac{79}{12}$, $t-u=\frac{59}{12}$.

Ceux qui voudront approfondir davantage cette matière, consulteront le tome II de l'excellent Traité d'algèbre d'Euler.

AVERTISSEMENT.

Dans ce qui me reste à dire sur la résolution des équations, je ne considérerai plus que des équations déterminées. On pourroit résoudre, pour le troisième et le quatrième degré, et même pour les degrés supérieurs, des problêmes indéterminés analogues à quelques

de ceux que nous avons donnés pour les deux premiers degrés : mais ces recherches difficiles et de pure curiosité occuperoient une place qui sera mieux remplie par d'autres objets plus utiles.

CHAPITRE XV.

Des équations déterminées du troisième degré.

277. La formule générale des équations déterminées du troisième degré est $t^3 + at^2 + bt + c = 0$; t étant l'inconnue, et a, b, c des quantités données. En effet, quelque équation déterminée du troisième degré dont il soit question, on pourra mettre tous les termes d'un même côté, diviser tout par le multiplicateur de t^3, si ce multiplicateur est autre que 1 ; ensuite représenter par a le coëfficient de t^2, par b celui de t, et par c le résultat des termes tous connus.

278. Les quantités a, b, c étant données, j'observe d'abord que si l'on suppose $c = 0$, on aura $t^3 + at^2 + bt = 0$, expression que l'on peut regarder, ou comme le produit de $t = 0$ par la quantité $t^2 + at + b$, ou comme le produit de la quantité t par l'équation du second degré $t^2 + at + b = 0$, qui donne $t = \frac{-a \pm \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$. Ainsi l'équation $t^3 + at + bt = 0$ a trois racines ; savoir, 0, $\frac{-a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, $\frac{-a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, c'est-à-dire, qu'en mettant l'une quelconque de ces trois quantités à la place de t, on aura également, $t^3 + at^2 + bt = 0$, comme il est aisé de le vérifier par le calcul.

279. Supposons que a et b soient 0 ; l'équation générale $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ deviendra $t^3 + c = 0$, ou $t^3 = -c$. Tirant la racine cube de chaque côté, on aura $t = \sqrt[3]{-c}$,

expression toujours réelle (c étant supposée réelle), et qui sera positive si c est négative, négative si c est positive.

D'un autre côté, si l'on divise l'équation $t^3 + c = 0$, par $t - \sqrt[3]{-c}$, ou (en supposant, pour abréger un peu les expressions, $c = m^3$), $t^3 + m^3 = 0$, par $t + m$: on trouvera pour quotient l'équation du second degré,

$$t^2 - mt + m^2 = 0, \text{ laquelle donne } t = \frac{m \pm m\sqrt{-3}}{2},$$

qui sont deux autres racines de l'équation proposée; mais ces deux nouvelles racines sont imaginaires.

On aura donc également $t^3 + m^3 = 0$, soit qu'on mette pour t, ou $-m$, ou $\frac{m + m\sqrt{-3}}{2}$, ou $\frac{m - m\sqrt{-3}}{2}$, comme le montre le calcul.

280. *Scholie.* Les deux cas précédents n'ont aucune difficulté. Je vais maintenant résoudre l'équation générale: $t^3 + at^2 + bt + c = 0$, sans supposer qu'aucune des quantités a, b, c, soit zéro. Mais, pour faciliter cette recherche autant qu'il est possible, voyons d'abord si on ne peut pas transformer l'équation dont il s'agit en une autre qui ait un terme de moins, et qui, étant par conséquent plus simple, doit être naturellement plus aisée à traiter.

281. Lemme. *Délivrer l'équation* $t^3 + at^2 + bt + c = 0$, *de l'un de ses termes.*

Qu'on prenne une nouvelle inconnue x, et une quantité indéterminée m, telle que l'on ait $t = x + m$, et par conséquent $t^2 = x^2 + 2mx + m^2$, $t^3 = x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3$. En substituant ces valeurs de t, t^2, t^3 dans notre équation, et ordonnant tout par rapport à x, nous aurons la transformée,

$$x^3 \left.\begin{matrix} + 3m \\ + a \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + 3m^2 \\ + 2am \\ + b \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + m^3 \\ + bm^2 \\ + bm \\ + c \end{matrix}\right\} = 0.$$

Or, comme dans cette nouvelle équation la quantité m est arbitraire, il est clair que nous pouvons la prendre de

manière que l'un des trois derniers termes s'évanouisse. Si nous voulons faire évanouir le second terme, nous aurons $(3m + a)x^2 = 0$; et comme x n'est pas zéro (autrement on auroit $t = m$, ce qui ne feroit que changer l'équation proposée en une autre où l'inconnue, au lieu d'être t, seroit m), il s'ensuit qu'on a $3m + a = 0$, ce qui donne $m = -\frac{a}{3}$.

Si nous voulons faire évanouir le troisième terme, nous aurons $(3m^2 + 2am + b)x = 0$, c'est-à-dire, $3m^2 + 2am + b = 0$. D'où l'on voit que pour déterminer m il faut résoudre une équation du second degré.

Si nous voulions faire évanouir le quatrième terme, nous aurions $m^3 + am^2 + bm + c = 0$. Ainsi, pour déterminer m, il faudroit résoudre une équation du troisième degré qui a tous ses termes; problème qui est de même nature que celui dont nous sommes occupés.

Nous ne pouvons donc ici faire évanouir que le second ou le troisième terme. Faisons évanouir le second, c'est-à-dire, faisons $m = -\frac{a}{3}$, car cette préparation est celle qui produit les calculs les plus simples; nous aurons la transformée,

$$x^3 \left.\begin{matrix} -\frac{a^2}{3} \\ +b \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} \frac{2a^3}{27} \\ -\frac{ab}{3} \\ +c \end{matrix}\right\} = 0;$$

ou bien (en supposant, pour abréger les expressions, $-\frac{a^2}{3} + b = p$, $\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = q$), $x^3 + px + q = 0$, équation qu'on apprendra à résoudre dans un moment, et dans laquelle p et q sont supposées des quantités réelles, qui peuvent être d'ailleurs positives ou négatives.

282. *Remarque.* Nous observerons au sujet du problème précédent, que la même substitution de $x + m$ à la place

de t, peut servir à faire disparoître tel terme qu'on voudra d'une équation d'un degré quelconque.

En effet, si on a, par exemple, l'équation générale du quatrième degré, $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = o$; en y substituant $x + m$ au lieu de t, on aura la transformée,

$$x^4 + \left.\begin{matrix}4m\\+a\end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix}6m^2\\+3am\\+b\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}4m^3\\+3am^2\\+2bm\\+c\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}m^4\\+am^3\\+bm^2\\+cm\\+d\end{matrix}\right\} = o,$$

dans laquelle faisant $4m + a = o$, ou $m = -\frac{a}{4}$, on aura une équation du quatrième degré, qui n'aura point de second terme. Le troisième terme s'évanouira en faisant $6m^2 + 3am + b = o$, c'est-à-dire, par la résolution d'une équation du second degré. Le quatrième s'évanouiroit en faisant $4m^3 + 3am^2 + 2bm + c = o$, c'est-à-dire, par la résolution d'une équation du troisième degré. Le cinquième s'évanouiroit en faisant $m^4 + am^3 + bm^2 + cm + d = o$, c'est-à-dire, par la résolution d'une équation du quatrième degré.

De même, dans l'équation générale du cinquième degré $t^5 + at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = o$; si l'on fait $t = x + m$, on aura la transformée,

$$x^5 + \left.\begin{matrix}5m\\+a\end{matrix}\right\} x^4 + \text{etc.} = o,$$

dont le second terme s'évanouira par l'équation du premier degré, $5m + a = o$, ou $m = -\frac{a}{5}$; le troisième s'évanouira par une équation du second degré; etc.

En général, qu'on ait une équation d'un degré quelconque n, représentée par $t^n + at^{n-1}\ bt^{n-2}$ + etc. $= o$, en faisant $t = x + m$, on aura une transformée dont le second terme s'évanouira par l'équation du premier degré $nm + a = o$, ou $m = -\frac{a}{n}$; les termes suivants s'évanoui-

ront par des équations du second, du troisième, etc. degrés.

283. Problème I. *Résoudre l'équation* $x^3 + px + q = 0$.

Il est évident que, lorsque j'aurai trouvé la valeur de x, laquelle contiendra dans son expression les lettres p et q, j'aurai aussi la valeur de t, exprimée en a, b, c, puisqu'il ne faudra pour cela que mettre pour p sa valeur $b - \frac{a^2}{3}$, pour q sa valeur $\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$, et ensuite retrancher de l'expression de x la quantité $\frac{a}{3}$, à cause de l'équation $t = x + m = x - \frac{a}{3}$. Si la valeur de x est réelle, celle de t le sera aussi : si la valeur de x est imaginaire, celle de t le sera également, puisqu'en retranchant d'une quantité imaginaire une quantité réelle, on ne peut avoir qu'un reste imaginaire.

Ayant écrit l'équation $x^3 + px + q = 0$ sous la forme $x^3 = -px - q$, je prends une nouvelle inconnue z ; j'ajoute à chaque membre la quantité $3x^2z + 3xz^2 + z^3$, ce qui donne

$$(A)\quad x^3 + 3x^2z + 3xz^2 + z^3 = \left.\begin{matrix}3zx^2 + 3z^2\\ -p\end{matrix}\right\} \begin{matrix}x + z^3\\ -q,\end{matrix}$$

équation dont le premier membre est le cube du binome $x + z$. Or, comme l'inconnue z est arbitraire, nous pouvons supposer que cette inconnue est telle que la partie $3zx^2 + (3z^2 - p)x$ du second membre s'évanouisse, c'est-à-dire forme l'équation partielle

$$3zx^2 + (3z^2 - p)x = 0, \text{ ou } 3zx + 3z^2 - p = 0 ;$$

d'où l'on tire $x + z = \frac{p}{3z}$, et $(x + z)^3 = \frac{p^3}{27z^3}$.

D'un autre côté, la même supposition réduit l'équation (A) à celle-ci, $(x + z)^3 = z^3 - q$.

Egalant entre elles les deux valeurs de $(x + z)^3$, on aura,

$$\frac{p^3}{27z^3} = z^3 - q, \text{ ou bien } z^6 - qz^3 = \frac{p^3}{27},$$

équation qui se résout (267) par la méthode du second degré, et qui donne

$$z^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}.$$

Représentons, pour abréger, par deux simples lettres m et n, les deux valeurs qui résultent de là pour z; c'est-à-dire, supposons

$$m = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)},$$

$$n = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)};$$

nous aurons en conséquence ces deux équations, $z^3 = m^3$, $z^3 = n^3$, qui, étant résolues par la méthode de l'article 279, donnent pour z ces six valeurs;

$$\text{I. } z = m,\ z = -\frac{m}{2}(1 \pm \sqrt{-3});$$

$$\text{II. } z = n,\ z = -\frac{n}{2}(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Multiplions m par n, il nous viendra, $mn = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}$; ou $p = -3mn$. Or, on a trouvé $x + z = \frac{p}{3z}$, ou $x = \frac{p}{3z} - z$; donc $x = -\frac{mn}{z} - z$. Substituons successivement dans cette équation, à la place de z, ses six valeurs, nous trouverons pour x six valeurs qui se réduisent à trois. En effet, mettant d'abord les trois valeurs de z en m, on aura, $x = -n - m$, $x = \frac{2n}{1 \pm \sqrt{-3}} + \frac{m}{2} \times (1 \pm \sqrt{-3})$; et si on multiplie haut et bas le premier terme de chacune des deux dernières valeurs de x, par $1 \mp \sqrt{-3}$, elles deviendront $x = \frac{m+n}{2} \pm \frac{(m-n)\sqrt{-3}}{2}$.

Il vient les trois mêmes valeurs pour x, en mettant pour z ses trois autres valeurs en n, et opérant de la même manière.

Ainsi l'équation proposée $x^3 + px + q = 0$, a simplement les trois racines,

$$x = -n - m,\ x = \frac{m+n}{2} \pm \frac{(m-n)\sqrt{-3}}{2};$$

ou, (en éliminant m et n),

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)};$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(+\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(+\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{2q}\right)}\right)}$$

$$\pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(+\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(+\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)}\right]$$

$$\times \sqrt{-3}.$$

284. *Corollaire I.* On voit au premier coup-d'œil par les formules, $x = -n - m$, $x = \frac{m+n}{2} \pm \frac{(m-n)\sqrt{-3}}{2}$, que la première valeur de x est réelle, et que les deux autres sont imaginaires, lorsque m et n sont des quantités réelles. Or, m et n sont réelles lorsque la quantité radicale $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right]}$ est réelle, et cette quantité est réelle dans deux cas :

1.° Lorsque p est positif, parce qu'alors le cube $\frac{p^3}{27}$ est aussi positif, et qu'en ajoutant ce cube avec le quarré $\frac{qq}{4}$ qui est toujours positif, quand même la quantité q seroit négative, on a une somme positive dont la racine quarrée est par conséquent réelle.

2.° Lorsque p étant négatif, ou lorsque l'équation ayant cette forme $x^3 - px + q = 0$, on a $\frac{qq}{4} > \frac{p^3}{27}$, parce que la quantité radicale du second degré, qui est maintenant $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right]}$, est encore réelle.

Ainsi concluons, 1.° que toutes les équations du troisième degré, qui ont cette forme $x^3 + px + q = 0$, ont une seule racine réelle, et que les deux autres sont imaginaires.

2.° Que les équations de cette forme, $x^3 - px + q = 0$, sont encore dans le même cas, pourvu que l'on ait $\frac{qq}{4} > \frac{p^3}{27}$.

285. *Corollaire II.* Si dans l'hypothèse que le terme px est précédé du signe —, ou que l'équation est de cette forme, $x^3 - px + q = 0$, on a $\frac{qq}{4} = \frac{p^3}{27}$, la quantité radicale $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right]}$ disparoît, et on a $m = n$. D'où il suit que le terme $\frac{(m-n)\sqrt{-3}}{2}$ s'évanouit, soit qu'on le prenne en + ou en —. Par conséquent les trois racines de l'équation sont réelles, et de plus les deux dernières sont égales entre elles. Ces trois racines sont,

$$x = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\ x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\ x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

286. *Corollaire III.* Supposons toujours l'équation $x^3 - px + q = 0$, mais qu'on ait maintenant $\frac{qq}{4} < \frac{p^3}{27}$. Alors la quantité radicale $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right]}$ devient imaginaire; les deux quantités m et n sont aussi imaginaires séparément, puisque chacune d'elles renferme dans son expression une partie imaginaire qui rend le tout imaginaire. Cependant on ne doit pas conclure pour cela qu'aucune des racines de l'équation soit imaginaire; elles sont au contraire toutes les trois réelles. Voici un moyen pour s'en convaincre.

Représentons, pour abréger le calcul, la quantité radicale imaginaire, $\sqrt{\left[\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}\right]}$, ou $\sqrt{\left[\left(\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}\right) \times -1\right]}$, par $\sqrt{-kk}$, ou $k\sqrt{-1}$, k étant une quantité réelle $= \sqrt{\left[\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}\right]}$; faisons de plus $\frac{q}{2} = r$; nous aurons (en mettant pour m et n leurs valeurs en r et k dans les formules, $x = -m - n$, $x = \frac{m+n}{2} \pm \frac{(m-n)\sqrt{-3}}{2}$),

$$x = -(r + k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (r - k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}};$$

$$x = \frac{(r + k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{(r - k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}}{2} \pm$$

$\frac{1}{2}[(r + k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (r - k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}].\sqrt{-3}$.

Or, en faisant le développement de ces trois expressions par le moyen de la formule du binome (145), et observant que $\sqrt{-3}.\sqrt{-1} = \sqrt{3}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -\sqrt{3}$: on trouve que tous les termes où il entre des imaginaires se détruisent mutuellement par l'opposition des signes, et qu'il ne reste que les seuls termes réels. En effet, ces expressions deviennent

$$x = -2\sqrt[3]{r}.\left(1 + \frac{k^2}{9r^2} - \frac{10k^4}{243r^4} + \frac{154k^6}{6561r^6}\text{ etc.}\right);$$

$$x = \sqrt[3]{r}.\left(1 + \frac{k^2}{9r^2} - \frac{10k^4}{243r^4} + \frac{154k^6}{6561r^6}\text{ etc.}\right) \pm \frac{k\sqrt{3}}{\sqrt[3]{r^2}}.\left(\frac{1}{3} - \frac{5k^2}{81r^2} + \frac{22k^4}{729r^4} - \text{etc.}\right).$$

Si on avoit $k > r$, il faudroit en élevant le binome $r \pm k\sqrt{-1}$ à la puissance $\frac{1}{3}$, regarder le terme $\pm k\sqrt{-1}$ comme le premier. Alors, en faisant des calculs entièrement semblables aux précédens, et considérant que $(\pm k\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \pm k^{\frac{1}{3}}.(-1)^{\frac{1}{3}} \times (-1)^{\frac{1}{2}} = \mp k^{\frac{1}{3}}.\sqrt{-1}$; on trouveroit,

$$x = \frac{2r}{\sqrt[3]{k^2}}\left(\frac{1}{3} - \frac{5r^2}{81k^2} + \frac{22r^4}{729k^4} - \text{etc.}\right);$$

$$x = -\frac{r}{\sqrt[3]{k^2}}\left(\frac{1}{3} - \frac{5r^2}{81k^2} + \frac{22r^4}{729k^4} - \text{etc.}\right) \pm \sqrt[3]{k}.\sqrt{3}.\left(1 + \frac{r^2}{9k^2} - \frac{10r^4}{243k^4} + \frac{154r^6}{6561k^6} - \text{etc.}\right).$$

Ces valeurs ne contiennent encore point d'imaginaires, et forment des séries convergentes.

Enfin si on voit $k = r$, les expressions qu'on trouveroit pour les racines, en prenant r, ou $k\sqrt{-1}$ pour les premiers termes des formules à développer, seroient encore réelles, et de plus convergeroient, mais plus lentement.

Concluons de là que les équations de la forme $x^3 - px + q = 0$, et où l'on a $\frac{p^3}{27} < \frac{qq}{4}$ ont en général trois racines

réelles et inégales entre elles. Ces racines contiennent en apparence des parties imaginaires, mais dans la vérité ces parties imaginaires s'anéantissent réciproquement par l'opposition des signes. On n'a pas encore pu exprimer *en général* ces racines par des formules algébriques finies qui ne continssent point d'imaginaires, et c'est ce qui a fait donner à ce cas le nom de *cas irréductible du troisième degré.*

J'ai dit *en général:* car il y a des équations particulières de la forme $x^3 - px + q = 0$, où l'on a $\frac{p^3}{27} < \frac{qq}{4}$, et où cependant les racines peuvent être représentées par des expressions finies débarrassées d'imaginaires. Cela arrive lorsque les parties de la racine comprises sous les radicaux cubes sont des cubes parfaits ; car alors, en tirant les racines cubes, comme on l'enseignera dans la suite, les parties imaginaires se détruisent par l'opposition des signes.

Faisons quelques applications de cette théorie générale.

287. Problème II. *Un homme place* 900[tt] *dans un commerce ; au bout de trois ans il retire* 1089[tt] *: on demande à combien pour* 100 *se monte le gain qu'il a fait.*

Soit u le gain cherché. Il est clair que le gain rapporté par les 900[tt] au bout de la première année sera le quatrième terme d'une proportion dont 100, u et 900 sont les trois premiers. Ce gain sera donc exprimé par $\frac{900 \times u}{100}$; et par conséquent la somme qui revient à notre commerçant à la fin de la première année est $900 + \frac{900 \times u}{100}$, ou $900 \times \frac{100+u}{100}$. Semblablement la somme qui lui revient au bout de la seconde année est $\left(900 \times \frac{100+u}{100}\right) \times \frac{100+u}{100}$; celle qui lui revient au bout de la troisième année est $\left(\left(900 \times \frac{100+u}{100}\right) \times \frac{100+u}{100}\right) \times \frac{100+u}{100}$. Or, p thèse, cette dernière somme doit être 1089.

l'équation $\left(\left(900\times\frac{100+u}{100}\right)\times\frac{100+u}{100}\right)\times\frac{100+u}{100}=1089$, qui se réduit à $(100+u)^3=1210000$. Donc, si l'on suppose $100+u=t$, on aura $t^3=1210000$, équation qui se rapporte à celle de l'art. 279, en faisant $c=-1210000$. Tirons la racine cube de part et d'autre; nous aurons $t=106,56$ à très-peu de chose près. Donc $u=6,56$ sensiblement. Si l'on évalue (Arith. 113) la fraction décimale 0,56 en sous et deniers, on trouvera qu'elle vaut $11^s\,2^d\frac{2}{5}$. Ainsi le gain que le commerçant a fait se monte pour $100^{\#}$ à $6^{\#}\,11^s\,2^d\,\frac{2}{5}$ à peu de chose près.

288. Probléme III. *Un homme place* $900^{\#}$ *dans un commerce; au bout de trois ans il retire une quantité d'argent telle qu'en l'ajoutant avec celle qui lui reviendroit à la fin de la première année on auroit* $2400^{\#}$ *pour somme : trouver à combien pour* 100 *monte le gain qu'il a fait.*

Soit u le gain cherché. En raisonnant comme dans le problême précédent, on voit que la quantité d'argent due au commerçant à la fin de la première année est $\frac{900\times(100+u)}{100}$; et que la quantité due à la fin la troisième année est $\frac{900\times(100+u)^3}{1000000}$. Ainsi on aura par les conditions du problême, $\frac{900\times(100+u)^3}{1000000}+\frac{900\times(100+u)}{100}=2400$.

Soit $100+u=x$. On aura, après les réductions, $x^3+10000\,x-\frac{8000000}{3}=0$, équation qui se rapporte à la formule $x^3+px+q=0$ de l'article 283, en faisant $p=10000$, $q=-\frac{8000000}{3}$. Et, comme la quantité p est positive, il s'ensuit (284) que l'équation n'a qu'une seule racine réelle, et que les deux autres sont imaginaires. En substituant à la place de p et q leurs valeurs numériques dans la première expression générale de x trouvée (283), racine réelle cherchée,

$x = \sqrt[3]{[\frac{4000000}{3} + \frac{1000000}{2}\sqrt{\frac{49}{3}}]} + \sqrt[3]{[\frac{4000000}{2} - \frac{1000000}{2}\sqrt{\frac{49}{3}}]}$.

Or la racine quarrée de la fraction $\frac{49}{3}$ est 4,0414, à peu de chose près. La première partie de x sera donc $\sqrt[3]{\frac{8041400}{3}}$, c'est-à-dire, 138,9[illegible] à peu de chose près; et la seconde sera $\sqrt[3]{-\frac{41400}{3}}$, c'est-à-dire, — 23,986 à peu près. Donc $x = 114,929$ sensiblement. Ainsi, à cause de $100 + u = x$, on aura $u = 14,929$. Evaluant la fraction décimale 0,929 en sous et deniers, on trouvera qu'elle vaut $18^s\ 6^d\ \frac{24}{25}$. Par conséquent enfin le gain que le commerçant a fait se monte, pour 100^{tt}, à $14^{tt}\ 18^s\ 6^d\ \frac{24}{25}$ sensiblement.

289. Problème IV. *Trouver un nombre dont le cube ajouté avec le produit du même nombre par* 45 *donne* 100 *pour somme.*

Soit x le nombre cherché. On aura l'équation $x^3 + 45x = 100$, ou bien $x^3 + 45x - 100 = 0$, qui se rapporte à la formule $x^3 + px + q = 0$, en faisant $p = 45$, $q = -100$. Cette équation (284) a une racine réelle et les deux autres imaginaires. En la soumettant à la formule générale de l'article 283, et mettant à la place des quantités leurs valeurs numériques, on trouvera $x = \sqrt[3]{[50 + 5\sqrt{235}]} + \sqrt[3]{[50 - 5\sqrt{235}]}$.

290. Problème V. *Les conditions d'un problême ayant mené à l'équation* $t^3 + 12t^2 + 60t + 103 = 0$, *il s'agit de la résoudre ou de trouver l'inconnue.*

Je commence par faire disparoître (281) le second terme de cette équation, en faisant $t = x - 4$. Par là j'ai la transformée $x^3 + 12x - 9 = 0$, qui se rapporte à la formule $x^3 + px + q = 0$, p étant $= 12$, $q = -9$. Cette équation n'a qu'une racine réelle qui est (283), $x = \sqrt[3]{\left[\frac{9 + \sqrt{337}}{2}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{9 - \sqrt{337}}{2}\right]}$. Retranchant 4 de cette racine, on aura la valeur de t.

291. Problême VI. *Résoudre l'équation* $t^3 + 6t^2 - 18t + 10 = 0$.

Commençons par faire évanouir le second terme de cette équation, en supposant $t = x - 2$; nous aurons la transformée $x^3 - 30x + 62 = 0$, qui se rapporte à la formule $x^3 - px + q = 0$. Et comme on a ici $\frac{qq}{4} < \frac{p^3}{27}$, il s'ensuit (286) que les trois racines de l'équation sont réelles. La valeur approchée de l'une d'entre elles est, par le même article, $x = -2\sqrt[3]{r} \times \left(1 + \frac{k^2}{9r^2} - \frac{10k^4}{243r^4} + \frac{154k^6}{6561r^6} - \text{etc.}\right)$; et nous avons ici $r = \frac{q}{2} = 31$, $r^2 = 961$, $k^2 = 39$. D'où l'on voit que la formule converge rapidement. Ainsi on peut se contenter de prendre ses trois premiers termes; et alors, en mettant à la place des grandeurs littérales leurs valeurs numériques, on trouvera $x = -6{,}311$.

Les deux autres racines de l'équation peuvent se trouver par les autres formules de l'article cité. Mais il est plus commode dans la pratique de faire servir à cette recherche la racine déja trouvée, opération qui consiste à diviser l'équation $x^3 - 30x + 62 = 0$ par $x + 6{,}311$. Par là on trouve le quotient $xx - 6{,}311\,x + 9{,}828721$, et le reste $0{,}02905823$1, qui est assez petit pour pouvoir être négligé. On aura donc à peu près $xx - 6{,}311\,x + 9{,}828721 = 0$, équation du second degré, qui donne sensiblement ces deux racines, $x = 2{,}7971$, $x = 3{,}5139$. Ainsi les trois valeurs de t sont, à peu de chose près, $t = -8{,}311$, $t = 0{,}7971$, $t = 1{,}5139$.

292. *Scholie.* La méthode pour résoudre les équations du troisième degré s'étend à toutes les équations de la forme $u^{3n} + au^{2n} + bu^n + c = 0$; car en faisant $u^n = t$, on a la transformée $t^3 + at^2 + bt + c = 0$, qui est du troisième degré. Connoissant t, on connoîtra aussi u, puis- $= t^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{t}$.

CHAPITRE XVI.

Des équations déterminées du quatrième degré.

293. Les équations déterminées du quatrième degré peuvent être représentées par la formule générale $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = o$, t étant l'inconnue, a, b, c, d des quantités données, et réelles, positives ou négatives.

294. Qu'on ait d'abord tout-à-la-fois $a = o$, $b = o$, $c = o$; cette formule deviendra $t^4 + d = o$, ou $t^4 = -d = d \times -1$. Tirant la racine quarrée de part et d'autre, on aura $tt = \pm \sqrt{d} . \sqrt{-1}$; ce qui donne pour tt deux valeurs ou racines imaginaires. Chacune de ces valeurs donne, en tirant encore la racine quarrée, deux valeurs imaginaires pour t. Ainsi l'équation $t^4 + d = o$ a quatre racines qui sont toutes imaginaires. Il est en effet évident que la quatrième puissance d'une quantité réelle, positive ou négative, étant toujours positive, il n'est pas possible que cette quatrième puissance, ajoutée avec une quantité positive, puisse former une somme égale à zéro.

Si le terme d étoit précédé du signe $-$, c'est-à-dire, si on avoit l'équation $t^4 - d = o$, ou $t^4 = d$, on trouveroit d'abord, en tirant la racine quarrée, $tt = \pm \sqrt{d}$, ce qui donne pour tt deux valeurs réelles. La première de ces valeurs donne pour t deux valeurs réelles, l'une positive, l'autre négative; mais la seconde donne pour t deux valeurs imaginaires. Ainsi l'équation $t^4 - d = o$ a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, et deux racines imaginaires. Soit, par exemple, $d = 16$. Les deux valeurs de t sont 2 et -2, et les deux valeurs imaginaires sont $+2\sqrt{-1}$, et $-2\sqrt{-1}$.

295. Soit simplement $d = o$; notre formule générale devient $t(t^3 + at^2 + bt + c) = o$; d'où l'on tire ou $t = o$ ou $t^3 + at^2 + bt + c = o$. Et, comme cette dernière é-

tion, qui est du troisième degré et qui se résout par les méthodes expliquées dans le chapitre précédent, a nécessairement une racine réelle, tandis que les deux autres peuvent être réelles ou imaginaires, il s'ensuit que l'équation $t^4 + at^3 + bt^2 + ct = 0$ a une racine $= 0$, une seconde racine qui est réelle, et deux autres qui peuvent être réelles ou imaginaires.

296. Soient $a = 0$, $c = 0$: la formule générale deviendra $t^4 + bt^2 + d = 0$, équation qui se résout (267) par la méthode du second degré, et qui donne d'abord $t^2 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{bb}{4} - d\right]}$, puis $t = \pm \sqrt{\left[-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - d\right)}\right]}$. Ainsi l'équation $t^4 + bt^2 + d = 0$ a quatre racines, qui peuvent être toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles et deux imaginaires; cela dépend des signes et des valeurs des quantités données b et d.

297. *Scholie.* Les trois cas précédents sont les seuls qui puissent ainsi être résolus sans le secours d'aucune nouvelle règle. Je viens à la résolution de l'équation générale $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$, sans supposer qu'aucune des quantités a, b, c, d soit zéro. Et d'abord, pour simplifier le calcul, je commence par faire évanouir le second terme de cette équation, à quoi je parviendrai (281) en supposant $t = x - \frac{a}{4}$; supposition qui change l'équation $t^4 + at^3 +$ etc. en celle-ci $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, en prenant $p = b - \frac{3a^2}{8}$; $q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$; $r = \frac{a^2b}{16} - \frac{3a^4}{256} - \frac{ac}{4} + d$.

298. Problème I. *Résoudre l'équation*

$$(A) \quad x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Il est évident que si, après avoir trouvé les valeurs de x, on retranche de chacune d'elles la quantité constante $\frac{a}{4}$, on aura aussi les valeurs de t, à cause de $t = x - \frac{a}{4}$.

De plus, on voit que les valeurs de t seront réelles ou imaginaires selon que celles de x seront réelles ou imaginaires.

Mettons l'équation proposée sous cette forme,

$$x^4 = -px^2 - qx - r,$$

dont le premier membre est le quarré de x^2; ensuite prenons une nouvelle inconnue indéterminée z, et ajoutons $2x^2z + z^2$ à chacun des membres de l'équation précédente; nous aurons

$$x^4 + 2x^2z + z^2 = -px^2 - qx - r + 2x^2z + z^2;$$

$$\text{ou } (x^2 + z)^2 = (2z - p)x^2 - qx + z^2 - r,$$

équation dont le premier membre est le quarré du binome $x^2 + z$, et dont le second pourra devenir aussi un quarré, ou être regardé comme un quarré en prenant convenablement l'arbitraire z. J'observe pour cela que $(2z-p)x^2 - qx + z^2 - r = (2z-p) \times \left(x^2 - \frac{qx}{2z-p} + \frac{z^2-r}{2z-p}\right)$, expression dont la racine sera .... $\pm\sqrt{(2z-p)} \times \left(x - \frac{q}{2(2z-p)}\right)$, si pour assujétir (256) le second facteur $\left(x^2 - \frac{q}{2z-p}x + \frac{z^2-r}{2z-p}\right)$ à devenir un quarré parfait, on suppose $\frac{z^2-r}{2z-p} = \frac{1}{4}\left(\frac{-q}{2z-p}\right)^2$, ou $4(2z-p)(z^2-r) = q^2$. Cette supposition donne (en faisant $2z - p = s$, ou $z = \frac{p+s}{2}$, pour parvenir à des résultats plus simples, et ordonnant l'équation par rapport à s),

$$\text{(B)} \quad s^3 + 2ps^2 + (pp - 4r)s - q^2 = 0,$$

équation que je nomme *auxiliaire*, et qui, n'étant que du troisième degré, donnera la valeur de s par les m thodes du chapitre précédent. Ainsi nous pouvons re der s comme connue.

Maintenant, puisqu'on a $(x^2 + z)^2 = (2z - p$

$\left(x^2 - \frac{q}{2z-p}x + \frac{z^2-r}{2z-p}\right)$, ou bien (en employant la condition qui rend le second facteur du second membre un quarré parfait),

$$(x^2+z)^2 = (2z-p) \times \left(x - \frac{q}{2.(2z-p)}\right)^2;$$

on aura, en mettant pour z sa valeur $\frac{p+s}{2}$ et tirant la racine quarrée de chaque membre),

$$x^2 + \frac{p+s}{2} = \pm\left(x\sqrt{s} - \frac{q}{2\sqrt{s}}\right),$$

équation qui renferme ces deux-ci, $x^2 - x\sqrt{s} = -\frac{p}{2} - \frac{s}{2} - \frac{q}{2\sqrt{s}}$; $x^2 + x\sqrt{s} = -\frac{p}{2} - \frac{s}{2} + \frac{q}{2\sqrt{s}}$. Résolvant ces deux équations, qui sont chacune du second degré et qui donnent chacune deux valeurs de x, on aura pour x ces quatre valeurs :

$$x = \frac{\sqrt{s} \pm \sqrt{\left(-s - 2p - \frac{2q}{\sqrt{s}}\right)}}{2},$$

$$x = \frac{-\sqrt{s} \pm \sqrt{\left(-s - 2p + \frac{2q}{\sqrt{s}}\right)}}{2}.$$

299. *Corollaire I.* Comme l'équation auxiliaire (B) a trois racines, et que rien ne détermine à employer l'une d'entre elles préférablement aux deux autres dans les valeurs trouvées pour x ; il s'ensuit que toutes les trois peuvent être employées indifféremment. En faisant successivement ces substitutions de s, il semble au premier coup-d'œil qu'on aura douze valeurs pour x; mais on n'en trouvera réellement que quatre, ainsi qu'on va s'en convaincre très-simplement de la manière suivante.

Sans résoudre l'équation auxiliaire (B), représentons par g, h, k, les trois valeurs qu'elle donne pour s, c'est-à-dire, supposons qu'on ait, ou $s=g$, ou $s=h$, ou $s=k$, bien $(s-g)\times(s-h)\times(s-k)=0$, ou (en effec-tuant les multiplications), $s^3-(g+h+k)s^2+(gh+gk+$

$hk) s - ghk = 0$. Or cette équation devant être identique avec l'équation (B) ; si on les compare terme à terme, on aura $2p = -g - h - k$; $pp - 4r = gh + gk + hk$; $qq = ghk$, ou $q = \sqrt{(ghk)}$. Substituons pour p et q leurs valeurs dans les équations,

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{s} \pm \sqrt{\left(-s - 2p - \frac{2q}{\sqrt{s}}\right)}}{2} \\ x = \dfrac{-\sqrt{s} \pm \sqrt{\left(-s - 2p + \frac{2q}{\sqrt{s}}\right)}}{2} \end{array}\right| \text{ : nous aurons}$$

$$x = \frac{\sqrt{s} \pm \sqrt{\left(-s + g + h + k - \frac{2\sqrt{(ghk)}}{\sqrt{s}}\right)}}{2},$$

$$x = \frac{-\sqrt{s} \pm \sqrt{\left(-s + g + h + k + \frac{2\sqrt{(ghk)}}{\sqrt{s}}\right)}}{2}.$$

Cela posé, mettons d'abord g pour s, et observons qu'alors $-s + g + h + k - \frac{2\sqrt{(ghk)}}{\sqrt{s}} = h + k - 2\sqrt{(hk)} = (\sqrt{h} - \sqrt{k})^2$, ou $(\sqrt{k} - \sqrt{h})^2$; et que $-s + g + h + k + \frac{2\sqrt{(ghk)}}{\sqrt{s}} = h + k + 2\sqrt{(hk)} = (\sqrt{h} + \sqrt{k})^2$, ou $(-\sqrt{h} - \sqrt{k})^2$. Ainsi on aura pour x ces quatre valeurs, $x = \frac{\sqrt{g} + \sqrt{h} - \sqrt{k}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{g} - \sqrt{h} + \sqrt{k}}{2}$, $x = \frac{-\sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{k}}{2}$, $x = \frac{-\sqrt{g} - \sqrt{h} - \sqrt{k}}{2}$.

Semblablement, en mettant h pour s, on trouvera $x = \frac{\sqrt{h} + \sqrt{g} - \sqrt{k}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{g} + \sqrt{k}}{2}$, $x = \frac{-\sqrt{h} + \sqrt{g} + \sqrt{k}}{2}$, $x = \frac{-\sqrt{h} - \sqrt{g} - \sqrt{k}}{2}$.

Enfin, en mettant k pour s, on aura $x = \frac{\sqrt{k} + \sqrt{g} - \sqrt{h}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{g} + \sqrt{h}}{2}$, $x = \frac{-\sqrt{k} + \sqrt{g} + \sqrt{h}}{2}$, $x = \frac{-\sqrt{k} - \sqrt{g} - \sqrt{h}}{2}$.

Par où l'on voit que les trois valeurs de s donnent chacune les quatre mêmes valeurs pour x.

300. *Corollaire II.* Puisque le dernier terme de l'équation (B) est toujours négatif (qq étant toujours positif, soit qu'on prenne q en $+$ ou en $-$); il s'ensuit que cette équation a généralement au moins une racine positive. Car, ou ses trois racines sont réelles, ou l'une seulement est réelle tandis que les deux autres sont imaginaires; il n'y a pas d'autre combinaison possible, comme on le voit par le chapitre précédent. Or,

1.° Lorsque les trois racines de l'équation (B) sont réelles, j'observe d'abord qu'on ne peut pas supposer qu'elles soient toutes trois négatives, c'est-à-dire, qu'on ait, ou $s=-g$, ou $s=-h$, ou $s=-k$; car une telle supposition donneroit $(s+g)\times(s+h)\times(s+k)=0$, ou $s^3+(g+h+k)s^2+(gh+gk+hk)s+ghk=0$, équation dont le dernier terme est toujours positif, tandis que celui de l'équation (B) est négatif. On ne peut pas non plus rapporter l'équation (B) à la forme $(s-g)\times(s-h)\times(s+k)=0$, où il y a deux racines positives et une négative, parce qu'ici le dernier terme du produit effectué seroit encore positif. Mais elle peut se rapporter, soit à la forme $(s-g)\times(s+h)\times(s+k)=0$, où il y a une racine positive et deux négatives, soit à la forme $(s-g)\times(s-h)\times(s-k)=0$, où les trois racines sont positives; car dans l'un et l'autre cas le dernier terme du produit résultant est négatif, comme cela doit être. Il n'y a pas d'autres combinaisons pour les racines réelles. Ainsi, en supposant que les trois racines de l'équation auxiliaire (B) soient réelles, elles sont toutes les trois positives, ou il y en a une positive et deux négatives.

2.° Lorsque l'équation (B) a deux racines imaginaires, elle peut être regardée comme le produit d'une équation du premier degré, par une équation du second qui a ses racines imaginaires, et qui peut toujours être représentée comme $s^2 \mp ms + n=0$, la quantité n étant essen-

tiellement positive et plus grande que $\frac{m^2}{4}$. Alors l'équation (B) ne peut pas se rapporter à la forme $(s+g)\times(s^2\mp ms+n)=0$, qui contient, outre les deux racines imaginaires, une racine négative, puisque le dernier terme du produit effectué seroit ng, quantité positive; mais elle se rapporte à la forme $(s-g)\times(s^2\mp ms+n)=0$ qui contient, avec les deux racines imaginaires, une racine positive, et dont le dernier terme $-gn$ est négatif.

Il résulte de toute cette analyse que l'équation auxiliaire (B) contient toujours au moins une racine positive. Je représente cette racine par g, et je l'emploie dans les valeurs de x; alors la quantité $\sqrt{s}$ ou $\sqrt{g}$ étant toujours réelle, on voit que les racines de l'équation proposée $x^4+px^2+qx+r=0$, seront toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles et deux imaginaires, selon que les deux quantités radicales $\sqrt{\left(-s-2p-\frac{2q}{\sqrt{s}}\right)}$, $\sqrt{\left(-s-2p+\frac{2q}{\sqrt{s}}\right)}$ seront toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, ou l'une réelle et l'autre imaginaire. Or, puisqu'en vertu de l'article précédent on a les quatre mêmes valeurs pour x, quelle que soit celle des trois valeurs de s qu'on emploie, nous devons conclure en général que toute équation du quatrième degré a quatre racines réelles, ou quatre racines imaginaires, ou deux racines réelles et deux imaginaires.

301. *Corollaire III.* La lettre g représentant toujours la racine positive essentiellement contenue dans l'équation auxiliaire (B), et les quatre racines de l'équation (A) étant $x=\frac{\sqrt{g}\pm(\sqrt{h}-\sqrt{k})}{2}$, $x=\frac{-\sqrt{g}\pm(\sqrt{h}+\sqrt{k})}{2}$, on voit,

1.° Que ces quatre racines sont réelles, si, outre la quantité positive g, les quantités h et k sont encore positives, c'est-à-dire, si les trois racines de l'équation auxiliaire (B) sont positives.

2.° Les quatre racines de l'équation (A) sont imaginaires

lorsque les quantités h et k sont négatives et inégales, c'est-à-dire, lorsque l'équation (B) a une racine positive et deux racines négatives inégales.

3.° L'équation (A) a deux racines réelles égales et deux racines imaginaires, lorsque h et k sont des quantités négatives et de plus égales entre elles.

4.° Supposons que les quantités h et k soient imaginaires: alors ces quantités proviennent de l'équation du second degré $s^2 \mp ms + n = 0$, dans laquelle n est une quantité positive plus grande que $\frac{m^2}{4}$, et d'où l'on tire. . . . . . .
$s = \frac{\pm m \pm \sqrt{(m^2 - 4n)}}{2}$, en sorte que $h = \frac{\pm m + \sqrt{(m^2 - 4n)}}{2}$, $k = \frac{\pm m - \sqrt{(m^2 - 4n)}}{2}$, expressions qu'on peut écrire ainsi, $h = \frac{\pm m + \sqrt{(4n - m^2)}.\sqrt{-1}}{2}$, $k = \frac{\pm m - \sqrt{(4n - m^2)}.\sqrt{-1}}{2}$, ou bien (en représentant la quantité réelle $\sqrt{(4n - m^2)}$ par l), $h = \frac{\pm m + l\sqrt{-1}}{2}$, $k = \frac{\pm m - l\sqrt{-1}}{2}$. Cela posé, en tirant les racines quarrées de ces expressions de h et de k par la formule du binome (145), et les substituant dans les quatre valeurs de x, on trouvera que de ces quatre valeurs, deux renferment le radical imaginaire $\sqrt{-1}$, et que les deux autres ne contiennent que des quantités réelles. D'où je conclus que si l'équation auxiliaire (B) contient deux racines imaginaires, l'équation (A) a deux racines réelles et deux racines imaginaires.

Passons à des applications.

302. Problème II. *Résoudre l'équation* $t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 3 = 0$.

Je commence par délivrer l'équation de son second terme, en supposant (282), $t = x - 1$; ce qui me donne la transformée $x^4 - 3x^2 + 2x + 3 = 0$. On a donc $p = -3$, $= 4$, $r = 3$; et l'équation en s est $s^3 - 6s^2 - 3s - 4 = 0$.
ur résoudre cette équation au moyen des formules du
ent, il faut en faire évanouir le second

terme : je suppose donc en conséquence, $s = u + 2$; ce qui donne la transformée $u^3 - 15u - 26 = 0$. Cette équation n'a (284) qu'une seule racine réelle, et par conséquent l'équation $x^4 - 3x^2 +$ etc. a deux racines réelles et deux racines imaginaires. La valeur réelle de u est (283), $u = \sqrt[3]{[13 + \sqrt{44}]} + \sqrt[3]{[13 - \sqrt{44}]}$. Donc, à cause $s = u + 2$, nous aurons $\sqrt{s} = \sqrt{[2 + \sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} + \sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}]}$.

Substituant cette valeur de $\sqrt{s}$ dans les quatre expressions générales de x données à la fin de l'article 298, on aura les quatre racines de l'équation $x^4 - 3x^2 +$ etc. On trouvera par le calcul, ce qu'on sait déja, que deux de ces racines sont réelles et que les deux autres sont imaginaires. Connoissant les valeurs de x, on aura aussi celle de t, puisque $t = x - 1$. On voit que des quatre valeurs de t deux sont réelles, et les deux autres imaginaires.

Dans la pratique du calcul, les quantités radicales doivent être évaluées en nombres rationnels qui en approchent.

303. Problème III. *Résoudre l'équation* $x^4 - 12x^2 - 8x + 2 = 0$.

Cette équation est délivrée de son second terme, et on a $p = -12$, $q = -8$, $r = 2$. L'équation en s est $s^3 - 24s^2 + 136s - 64 = 0$; et, en supposant $s = u + 8$, on a l'équation en u sans second terme, $u^3 - 56u = 0$; d'où l'on tire ces trois racines réelles, $u = 0$, $u = +\sqrt{56}$, $u = -\sqrt{56}$. Ainsi les racines de l'équation proposée $x^4 - 12x^2 -$ etc., sont toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires. C'est le premier cas qui a lieu, parce que les trois valeurs de s sont positives, à cause de $s = u + 8$. Employons la première valeur de u, c'est-à-dire, prenons $u = 0$; nous aurons $s = u + 8 = 8$, et $\sqrt{s} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Substituant cette valeur de s dans les expressions générales de x de l'article 298, on aura pour les quatre racines de notre équation,

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{\left[4 + \frac{\sqrt{8}}{2}\right]},\ x = -\sqrt{2} + \sqrt{\left[4 - \frac{\sqrt{8}}{2}\right]},$$
$$x = \sqrt{2} - \sqrt{\left[4 + \frac{\sqrt{8}}{2}\right]},\ x = -\sqrt{2} - \sqrt{\left[4 - \frac{\sqrt{8}}{2}\right]}.$$

304. **Problème IV.** *Résoudre l'équation* $x^4 - 6x^2 + 4x + 23 = 0$.

Cette équation n'a point de second terme, et on a $p = -6$, $q = 4$, $r = 23$. L'équation en s est $s^3 - 12s^2 - 56s - 16 = 0$; et en supposant $s = u + 4$, on a, $u^3 - 104u - 368 = 0$.

Cette équation a ses trois racines réelles (284). Par conséquent les racines de l'équation proposée $x^4 - 6x^3 +$ etc. sont toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires. C'est le second cas qui a lieu, parce que l'équation en s n'a qu'une valeur positive et deux négatives. Le problème qui auroit conduit à l'équation $x^4 - 6x^2 +$ etc. renfermoit donc des absurdités dans ses conditions. Je me dispense d'écrire les valeurs de x, parce que ces valeurs imaginaires sont fort chargées de radicaux.

CHAPITRE XVII.

Efforts qu'on a faits pour résoudre les équations de tous les degrés.

305. La résolution générale des équations étant le principal objet de l'algèbre, on a tenté divers moyens d'étendre et de perfectionner cette théorie. Mais, quelques efforts qu'on ait faits en ce genre, on n'a pu parvenir jusqu'ici à résoudre généralement que les équations des quatre premiers degrés; encore même avons-nous vu que la méthode pour les équations du troisième et du quatrième degré a l'inconvénient de ne pas donner des racines sous une forme finie, lorsque l'équation du troisième degré, qu'il faut résoudre comme question primordiale ou

secondaire, appartient proprement au cas irréductible. Mais il y a dans les degrés supérieurs des équations assujéties à certaines conditions qui permettent de les résoudre généralement, ou de les abaisser à des degrés inférieurs, ce qui tend à diminuer la difficulté. Je n'ai pas l'intention de rapporter ici tous les travaux des algébristes sur cette matière; cela me meneroit trop loin. D'ailleurs je n'écris pas l'histoire de l'algèbre, j'en expose seulement l'état actuel. Cette dernière considération demande que je distingue ici et que je fasse connoître la méthode de Moivre (1) pour les équations *convertibles*; et l'essai d'une nouvelle méthode d'Euler (2) pour la résolution générale des équations de tous les degrés.

Equations résolues par Moivre.

306. On donne à ces équations le nom d'*équations* ou *formules convertibles*, parce que tous les termes étant supposés placés d'un même côté, elles forment des expressions telles 1.° que l'inconnue x et une quantité donnée k ont ensemble, ou séparément, le même nombre de dimensions dans tous les termes. 2.° Que les coëfficiens numériques des termes également éloignés des deux extrêmes, sont les mêmes et ont le même signe. Telles sont les équations :

$$x^3 + pkx^2 + pk^2x + k^3 = 0.$$
$$x^4 + pkx^3 + qk^2x^2 + pk^3x + k^4 = 0,$$
$$x^5 + k^5 = 0.$$

La méthode pour résoudre ces équations s'entendra facilement par des exemples. Je supposerai constamment $k = 1$, afin d'abréger; ce qui n'apporte aucune restriction à la méthode.

307. Exemple I. *Résoudre l'équation convertible*

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0.$$

On voit que la question est de décomposer la formule

(1) *Miscellanea analytica*, 1730.
(2) Acad. de Pétersb. ann. 1732 et 1762.

$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1$ en ses facteurs. Or, je suppose qu'elle soit composée de ces deux facteurs du second degré, $x^2 + ax + 1$, $x^2 + bx + 1$, en sorte qu'on ait... $x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = (x^2 + ax + 1) \times (x^2 + bx + 1)$ $= x^4 + (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 + (a + b)x + 1$.

En égalant terme à terme les deux membres, on aura $a + b = p$, $ab + 2 = q$; et ces deux équations combinées ensemble donneront $a = \frac{p + \sqrt{(pp - 4q + 8)}}{2}$, $b = \frac{p - \sqrt{(pp - 4q + 8)}}{2}$. Ainsi, les deux facteurs de la formule proposée sont, $x^2 + x\frac{(p + \sqrt{(pp - 4q + 8)})}{2} + 1$, $x^2 + x\frac{(p - \sqrt{(pp - 4q + 8)})}{2} + 1$.

Ces deux facteurs se décomposeront eux-mêmes chacun en deux facteurs du premier degré, par la méthode qui apprend à résoudre les équations du second degré.

Par exemple, soient $p = 5$, $q = 7$; en sorte que la formule soit $x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 1$: les deux facteurs du second degré seront $x^2 + \frac{x(5 - \sqrt{5})}{2} + 1$, $x^2 + \frac{x(5 + \sqrt{5})}{2} + 1$.

308. *Remarque.* Si par cette manière de décomposer la formule proposée on trouve pour a et b des valeurs imaginaires, on prendra pour facteurs composants du second degré, $x^2 + ax + b$, $x^2 + \frac{ax}{b} + \frac{1}{b}$; ce qui donnera

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = (x^2 + ax + b).\left(x^2 + \frac{ax}{b} + \frac{1}{b}\right) =$$
$$x^4 + \left(a + \frac{a}{b}\right)x^3 + \left(b + \frac{aa}{b} + \frac{1}{b}\right)x^2 + \left(a + \frac{a}{b}\right)x + 1.$$

Alors $a + \frac{a}{b} = p$, $b + \frac{aa}{b} + \frac{1}{b} = q$. Mettant dans la seconde de ces équations pour a sa valeur $\frac{pb}{1 + b}$, donnée par la première, on trouvera

$$b^4 + (2 - q)b^3 + (2 + p^2 - 2q)b^2 + (2 - q)b + 1 = 0,$$

équation convertible qui se décomposera par l'article précédent, en ces deux facteurs du second degré $b^2 - fb + 1$, $b^2 - gb + 1$; et on trouvera

$$f = \frac{q - 2 + \sqrt{(qq + 4q + 4 - 4pp)}}{2},$$

$$g = \frac{q - 2 - \sqrt{(qq + 4q + 4 - 4pp)}}{2}.$$

Connoissant f et g, on déterminera b, en regardant l'un des facteurs $b^2 - fb + 1$, $b^2 - gb + 1$, par exemple, le premier, comme une équation dont le second membre est zéro; ce qui donne

$$b = \frac{f \pm \sqrt{(ff - 4)}}{2}.$$

Ensuite (à cause de $a = \frac{bp}{b+1}$), on aura

$$a = \frac{pf \pm p\sqrt{(ff - 4)}}{2 + f \pm \sqrt{(ff - 4)}}.$$

Par exemple, soient $p = 4$, $q = 8$: si on employoit la décomposition de l'article précédent, on trouveroit pour a et b des quantités imaginaires. On emploiera donc la seconde décomposition, et on trouvera que les deux facteurs $xx + ax + b$, $x^2 + \frac{ax}{b} + \frac{1}{b}$, de la formule $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1$ sont $x^2 + x(2 + \sqrt{2}) + 3 + 2\sqrt{2}$, $x^2 + x(2 - \sqrt{2}) + 3 - 2\sqrt{2}$.

309. Exemple II. *Décomposer la formule $x^m - 1$ en facteurs réels, m étant un nombre entier positif et pair.*

Il est clair d'abord que $x^m - 1 = (x^{\frac{m}{2}} - 1) \times (x^{\frac{m}{2}} + 1)$. Si $\frac{m}{2}$ est encore un nombre pair, le premier facteur se décomposera en deux autres de la même manière, et on opérera sur le second comme dans l'exemple IV ci-dessous. Si $\frac{m}{2}$ est un nombre impair, on opérera sur les deux facteurs comme dans l'exemple suivant.

310. Exemple III. *Décomposer la formule* $x^n \pm 1$ *en facteurs réels, le nombre* n *étant un entier impair.*

D'abord j'observe que quelque soit l'exposant n, la formule $x^n \pm 1$ est divisible par $x \pm 1$. Faisant la division, on trouvera la formule convertible $x^{n-1} \mp x^{n-2} + x^{n-3} \mp x^{n-4} +$ etc. qui sera décomposable en facteurs réels.

Par exemple, soit $n = 5$; en divisant $x^5 \pm 1$ par $x \pm 1$, on trouve pour quotient $x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$. On supposera que ce quotient est composé des deux facteurs $x^2 + ax + 1$, $xx + bx + 1$, et on déterminera a et b comme ci-dessus.

Soit, pour second exemple, $n = 7$; en divisant $x^7 \pm 1$ par $x \pm 1$, on trouve pour quotient la formule convertible $x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$. Regardons ce quotient comme composé des deux facteurs convertibles $x^2 + ax + 1$, $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1$; multiplions ensemble ces deux facteurs, et comparons terme à terme le produit résultant avec la formule $x^6 \mp x^5 + x^4 \mp$ etc.; nous trouverons, pour déterminer a, b, c, les trois équations $a + b = \mp 1$, $c + ab + 1 = 1$, $2b + ac = \mp 1$. La première donne $b = \mp 1 - a$, la seconde $c = -ab = aa \pm a$; la troisième $c = \frac{-2b \mp 1}{a} = \frac{2a \pm 1}{a}$: égalant entre elles les deux valeurs de c, on aura $aa \pm a = \frac{2a \pm 1}{a}$ ou bien $a^3 \pm aa - 2a \mp 1 = 0$. D'où l'on voit que, pour déterminer a, il faut résoudre une équation du troisième degré. Connoissant a on connoîtra b et c. Enfin on décomposera la formule $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1$ en deux facteurs réels du second degré, comme dans l'exemple précédent.

311. Exemple IV. *Décomposer la formule* $x^n + 1$ *en facteurs,* n *étant un entier pair.*

On supposera que $x^n + 1$ est le produit du facteur trinome $x^2 + ax + 1$ par une formule convertible de l'ordre $n - 2$, et on déterminera les coëfficients comme dans les exemples précédents. Par exemple, soit $n = 6$; je fais

$x^6 + 1 = (xx + ax + 1) \times (x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1)$. Effectuant le produit indiqué et comparant terme à terme les deux membres de l'équation résultante, je trouve $a + b = 0$, $c + ab + 1 = 0$, $2b + ac = 0$; ce qui donne $b = -a$, $c = -1 - ab = -1 + aa$, $c = -\frac{2b}{a} = 2$, et par conséquent $aa - 1 = 2$, ou $a = \sqrt{3}$, $b = -\sqrt{3}$. La formule proposée $x^6 + 1$ a donc pour facteurs $xx + x\sqrt{3} + 1$, $x^4 - x^3\sqrt{3} + 2x^2 - x\sqrt{3} + 1$, dont le second se décompose comme on a vu.

Nos lecteurs appliqueront facilement l'esprit de ces exemples à d'autres questions de même nature.

Les formules ou équations résolues par Moivre sont fort utiles dans l'analyse. Malheureusement le nombre en est borué.

Méthode d'Euler.

312. En considérant la forme sous laquelle se présentent les racines des équations des quatre premiers degrés résolues par les méthodes ordinaires, Euler a conjecturé qu'en général la racine d'une équation du degré quelconque n pouvoit être représentée par la formule $x = A + a\sqrt[n]{s} + b\sqrt[n]{s^2} + c\sqrt[n]{s^3} + \ldots\ldots\ldots + k\sqrt[n]{s^{n-1}}$; x étant l'inconnue de l'équation proposée, s l'inconnue de l'équation de l'ordre immédiatement inférieur $n-1$; A, a, b, c, etc. des coëfficients donnés ou à déterminer. Cette manière d'envisager les racines des équations sert en effet à résoudre un très-grand nombre d'équations dans tous les degrés. La forme de cet ouvrage et les bornes dans lesquelles nous sommes obligés de nous réduire ne nous permettent pas d'entrer dans un grand détail à ce sujet. Nous nous contenterons d'appliquer la méthode d'Euler aux premiers degrés.

Je suppose toujours, pour simplifier le calcul, que l'équation à résoudre est privée de son second terme, forme à laquelle toute équation peut être ramenée (282).

Second degré : $x^2 + q = 0$.

313. Supposons $x = a\sqrt{u}$, et par conséquent $x^2 - a^2u = 0$. En comparant cette équation terme à terme avec la proposée $x^2 + q = 0$, on a $-a^2u = q$, ou (en supposant le coëfficient arbitraire $a = 1$), $u = -q$, et $\sqrt{u} = \pm\sqrt{-q}$. Donc $x = \pm\sqrt{-q}$.

Troisième degré : $x^3 + px + q = 0$.

314. Soit $x = a\sqrt[3]{u} + b\sqrt[3]{u^2}$, et conséquemment,

$$x^3 = a^3u + 3a^2bu\sqrt[3]{u} + 3ab^2u\sqrt[3]{u^2} + b^3u^2.$$

D'un autre côté, la formule proposée $x^3 + px + q = 0$, donne $x = -px - q$, ou (en mettant dans le second membre pour x sa valeur supposée),

$$x^3 = -pa\sqrt[3]{u} - pb\sqrt[3]{u^2} - q.$$

Egalons entre elles les deux valeurs de x^3, en faisant la partie rationnelle de l'une égale à la partie rationnelle de l'autre, et les parties radicales égales chacune à chacune des parties radicales correspondantes ; nous aurons $a^3u + b^3u^2 = -q$, $3abu = -p$, $3abu = -p$. D'où l'on voit qu'entre les cinq quantités p, q, a, b, u, on a simplement les deux équations $a^3u + b^3u^2 = -q$, $3abu = -p$. Nous supposerons donc que la valeur de l'un des deux coëfficients a et b, par exemple, celle de a est 1 ; alors nous aurons entre p, q, b, u les deux équations $u + b^3u^2 = -q$, $3bu = -p$. La seconde donne $b = -\frac{p}{3u}$; substituant cette valeur dans la première, on aura $u - \frac{p^3}{27u} = -q$; d'où l'on tire

$$u = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)},$$

$$\text{et } \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)}.$$

ensuite (à cause de $u + b^3u^2 = -q$, ou de $b^3u^2 = -q - u$), on trouvera

$$b\sqrt[3]{u^2} = \sqrt[3]{(-q-u)} = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)}.$$

Par conséquent on aura

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right)},$$

ce qui est conforme à l'article 283.

Quatrième degré : $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

315. Soit $x = a\sqrt[4]{u} + b\sqrt[4]{u^2} + c\sqrt[4]{u^3}$, ou bien (en observant que $\sqrt[4]{u^2} = \sqrt{u}$, et transposant le terme $b\sqrt[4]{u^2}$), $x - b\sqrt{u} = a\sqrt[4]{u} + c\sqrt[4]{u^3}$. Quarrant chaque membre, on aura $x^2 - 2bx\sqrt{u} + b^2u = a^2\sqrt{u} + c^2u\sqrt{u} + 2acu$, ou bien (en mettant tous les termes rationnels dans un membre, et les termes radicaux dans l'autre), $x^2 + b^2u - 2acu = (2bx + a^2 + c^2u)\sqrt{u}$. Quarrant de nouveau, mettant tout dans un même membre et ordonnant par rapport à x, on trouvera :

$$\left.\begin{matrix} x^4 - 4acu \\ \quad - 2b^2u \end{matrix}\right\} x^2 - 4bu(a^2 + c^2u)\,x \left.\begin{matrix} - a^4u \\ + b^4u^2 \\ - 4ab^2cu^2 \\ + 2a^2c^2u^2 \\ - c^4u^3 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Comparons cette équation avec la proposée $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, en égalant entre elles les parties correspondantes ; nous aurons $-4acu - 2b^2u = p$; $-4bu(a^2 + c^2u) = q$; $-a^4u + b^4u^2 - 4ab^2cu^2 + 2a^2c^2u^2 - c^4u^3 = r$. Comme nous avons quatre inconnues a, b, c, u, et seulement trois équations, supposons $b = 1$; nous aurons les trois équations $-4acu - 2u = p$; $-4u(a^2 + c^2u) = q$; $-a^4u + u^2 - 4acu^2 + 2a^2c^2u^2 - c^4u^3 = r$. La première donne $4acu = -p - 2u$, ou $4acu^2 = -pu - 2u^2$, et $4a^2c^2u^2 = \frac{(p + 2u)^2}{4}$. La seconde donne $a^2 + c^2u = -\frac{q}{4u}$, et par

conséquent $u(a^2 + c^2u)^2 = \frac{qq}{16u}$, ou bien $a^4u + 2a^2c^2u^2 + c^4u^3 = \frac{qq}{16u}$, ou $-a^4u - c^4u^3 + 2a^2c^2u^2 = -\frac{qq}{16u} + 4a^2c^2u^2 = -\frac{qq}{16u} + \frac{(p+2u)^2}{4}$. Substituant cette valeur et celle de $4acu^2$ dans la troisième équation, on trouvera, toutes réductions étant faites,

$$u^3 + \frac{pu^2}{2} + \frac{(pp-4r)u}{16} - \frac{qq}{64} = 0.$$

ou bien (en faisant $u = \frac{s}{4}$),

$$s^3 + 2ps^2 + (pp - 4r)s - qq = 0,$$

ce qui est l'équation auxiliaire (B) de l'article 295. Connoissant s au moyen de cette équation, on connoîtra aussi u; ensuite on déterminera a et c par le moyen des équations $-4acu - 2u = p$, $-4u(a^2 + c^2u) = q$. On trouve ainsi, en faisant les réductions convenables, les mêmes résultats que dans l'article 298.

Voyez, pour un plus ample développement de cette méthode, le tome IX des nouveaux Mémoires de l'académie de Pétersbourg.

CHAPITRE XVIII.

Propriétés communes aux équations de tous les degrés.

316. Les propriétés que je vais exposer dans ce chapitre sont curieuses par elles-mêmes; de plus elles préparent la voie pour la résolution exacte de certaines classes d'équations, et pour la résolution approchée des équations de tous les degrés, comme on le verra dans la suite; ainsi elles méritent l'attention du lecteur.

317. Soit, entre l'inconnue x et les données a, b, c, d, l'équation $(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d) = 0$;

c'est-à-dire, en effectuant les multiplications et ordonnant le produit final par rapport à x:

$$(\mathrm{A})\quad x^4 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\\-d\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}-abc\\-abd\\-acd\\-bcd\end{matrix}\right\} x + abcd \Bigg\} = 0.$$

Il est clair que l'assemblage des termes qui composent le premier membre de cette équation peut être égal à zéro de quatre manières différentes; savoir : en supposant, ou $x = a$, ou $x = b$, ou $x = c$, ou $x = d$; car, dans tous les cas, on aura zéro pour l'un des quatre facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$; or, zéro multipliant une quantité quelconque donne zéro pour produit. Si l'on mettoit pour x toute autre valeur e, alors aucun des facteurs $e - a$, $e - b$, $e - c$, $e - d$, n'étant zéro, leur produit ne seroit pas non plus zéro. Il y a donc dans l'équation proposée quatre racines ou valeurs pour x; et ce qui caractérise ces racines, c'est qu'en substituant successivement chacune d'elles à la place de x, la totalité des termes de l'équation s'évanouit par l'opposition des signes $+$ et $-$.

L'équation précédente n'est que du quatrième degré; mais on voit bien que la même remarque s'applique à toutes sortes d'équations; c'est-à-dire, qu'en général une équation d'un degré quelconque a autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue, et que chaque racine a la propriété de rendre, par sa substitution à la place de l'inconnue, l'assemblage de tous les termes de l'équation égal à zéro.

Je n'ai pas besoin de faire observer qu'on ne peut pas supposer tout-à-la-fois pour les racines d'une équation, $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, etc.; mais que ces équations particulières ont lieu seulement dans le sens disjonctif. Elles sont comprises comme facteurs dans une même équation, parce que l'algèbre, comme nous l'avons déja

observé (258), donne, par une même formule, non-seulement la solution du problême particulier qu'on peut s'être proposé, mais encore la solution de tous les problêmes qui ont des conditions semblables. Les différentes racines de l'équation satisfont à chaque condition. Ces racines peuvent différer entre elles, par la quantité et par la manière d'être.

Quelquefois on dit que les racines d'une équation sont, $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc., ce qui donne $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, etc.; mais cette manière de parler est une abréviation qu'il faut entendre dans le sens que je viens d'expliquer.

Dans l'équation qui précède toutes les racines sont positives. L'équation suivante $(x+a)\times(x+b)\times(x+c)\times(x+d) = 0$, c'est-à-dire,

$$(\mathrm{B})\quad x^4 \left.\begin{array}{l}+a\\+b\\+c\\+d\end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+cd\\+bd\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\right\} x + abcd \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 0,$$

a toutes ses racines négatives. Ces racines sont $x = -a$, $x = -b$, $x = -c$, $x = -d$; équations qu'il faut toujours entendre dans le sens disjonctif.

Il y a des équations qui ont leurs racines en partie positives, en partie négatives : telle est l'équation

$$(\mathrm{C})\quad x^3 \left.\begin{array}{l}-a\\-b\\+c\end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l}+ab\\-ac\\-bc\end{array}\right\} x + abc \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} = 0,$$

qui a deux racines positives, savoir : $x = a$, $x = b$; et une racine négative, savoir : $x = -c$.

Il est clair en général qu'une équation a autant de termes, plus un, qu'elle contient de racines.

318. *Remarque I.* Les équations précédentes ont été regardées comme formées d'équations du premier degré, et alors chacune d'elles contient autant de ces équations

composantes qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré. On peut aussi regarder une équation qui passe le second degré comme composée d'une ou de plusieurs équations du second degré, ou du troisième, etc., combinées, s'il est nécessaire, avec des équations du premier, de manière que le produit de toutes ces équations composantes forme une équation du même degré que la proposée, et qui coïncide entièrement avec elle. En effet, lorsque l'on compose une équation par la multiplication successive de plusieurs équations du premier degré, on forme des équations du second degré, ou du troisième, etc., qu'on peut par conséquent prendre pour des facteurs de la proposée.

319. *Remarque II.* Il peut arriver qu'une équation contienne des racines imaginaires, et alors il s'en trouve aussi dans ses équations composantes. Ces sortes de racines vont toujours deux à deux, parce qu'on peut les regarder comme contenant dans leur expression au moins un radical *pair* placé au devant d'une quantité négative, et qu'un tel radical porte essentiellement le double signe $\pm$. Soit, par exemple, l'équation $x^4 - (2a - 2c) x^3 + (aa + bb - 4ac + cc + dd) x^2 + (2aac + 2bbc - 2acc - 2add) x + (aa + bb) . (cc + dd) = 0$, que l'on peut regarder comme composée des deux équations du second degré, $xx - 2ax + aa + bb = 0$; $xx + 2cx + cc + dd = 0$. Chacune de ces équations composantes contient deux racines imaginaires. En effet, la première, $xx - 2ax + aa + bb = 0$ donne $x = a \pm b \sqrt{-1}$; et la seconde, $xx + 2cx + cc + dd = 0$, donne $x = -c \pm d \sqrt{-1}$.

On voit que dans l'équation résultante du produit de ces deux équations, les coëfficients des puissances de l'inconnue et le dernier terme de l'équation sont des quantités réelles ; les imaginaires disparoissant par voie d'addition et de multiplication.

Il en sera de même dans l'équation $(x-a) . (x+b) . (xx + 2cx + cc + dd) = 0$, qui est formée de deux équations du premier degré et d'une équation du second dont les racines sont imaginaires ; ainsi des autres.

320. Théorème I. *Quelle que soit l'espèce des racines d'une équation, si on ordonne cette équation par rapport à l'inconnue, et que le premier terme soit positif et n'ait pas d'autre coëfficient que l'unité, on remarquera les propriétés suivantes :*

I. *Le premier terme de l'équation est l'inconnue élevée à la puissance exprimée par le nombre des racines.*

II. *Le second terme contient l'inconnue élevée à une puissance moindre d'une unité, avec un coëfficient égal à la somme des racines prises avec des signes contraires.*

III. *Le troisième terme contient l'inconnue élevée à une puissance encore moindre de l'unité, avec un coëfficient égal à la somme de tous les produits qu'on peut former, en multipliant toutes les racines deux à deux.*

IV. *Le quatrième terme contient l'inconnue élevée à une puissance encore moindre d'une unité, avec un coëfficient égal à la somme des produits qu'on peut faire en multipliant trois à trois toutes les racines prises avec des signes contraires.*

Ainsi de suite jnsqu'au dernier terme, qui est le produit de toutes les racines prises avec des signes contraires.

Tout cela est évident à l'inspection des équations données pour exemple dans les articles 317 et 319.

321. *Corollaire I.* Donc une équation n'a point de second terme, lorsque toutes ses racines étant supposées réelles, les unes sont positives, les autres négatives, et que la somme des racines positives est égale à la somme des racines négatives. Ainsi, par exemple, l'équation (C) de l'article 317 n'aura point de second terme si l'on a $a + b = c$. Une équation dont toutes les racines sont imaginaires n'aura point de second terme, si la somme des quantités réelles qui entrent dans les expressions des racines est en partie positive, en partie négative, et que le résultat se réduise à zéro, les parties imaginaires de détruisant mutuellement par l'addition dans chaque paire de racines. Ainsi la première équation de l'article 319 n'aura point de second terme, si l'on a $-2a + 2c = 0$, ou $a = c$.

La seconde équation du même article, laquelle a ses racines en parties réelles, en partie imaginaires, n'aura point de second terme, si l'on a, $b - a + 2c = 0$, ou $a - b = 2c$. Une équation n'aura point de troisième terme, si la somme des produits des racines prises deux à deux est en partie positive, en partie négative, et que le résultat soit égal à zéro, etc.

On appelle *équation complète* celle qui a tous ses termes. Une équation où il manque un ou plusieurs termes est *incomplète :* telle est l'équation $x^3 + r = 0$, qui n'a ni second ni troisième terme. On peut toujours ramener une équation incomplète à la forme des équations complètes, en affectant du coëfficient zéro les puissances absentes de l'inconnue; ce qui est quelquefois nécessaire ou utile. Ainsi, au lieu de l'équation $x^3 + r = 0$, on peut écrire, $x^3 \pm 0x^2 \pm 0x + r = 0$.

322. *Corollaire II*. Une équation qui a des racines positives peut être transformée en une autre qui ait des racines négatives de même valeur, et réciproquement. Il ne faut pour cela que changer les signes des termes alternatifs, à compter du second inclusivement. Par exemple, si au lieu de l'équation $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$, qui a les trois racines positives $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$, on écrit $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = 0$; cette dernière équation aura les trois racines négatives $x = -1$, $x = -2$, $x = -5$. De même, si au lieu de l'équation $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$, qui a les deux racines positives, $x = 1$, $x = 2$, et la racine négative $x = -5$, on écrit $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$, cette dernière équation aura les deux racines négatives, $x = -1$, $x = -2$, et la racine positive $x = 5$.

En général, qu'on ait les deux équations, $(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d) \times \text{etc.} = 0$, $(x+a) \times (x+b) \times (x+c) \times (x+d) \times \text{etc.} = 0$, dont les racines sont les mêmes aux signes près. Si l'on développe ces équations, on verra (320) qu'elles doivent avoir différents signes au second terme, le même signe au troisième, différents signes au quatrième, le même signe au cinquième, etc.

Si une équation n'avoit pas tous ses termes, il faudroit commencer par suppléer les termes absents, par zéro, pour pouvoir y appliquer la règle en question.

323. *Corollaire III.* Sans connoître en particulier les racines d'une équation, on peut trouver leur somme, celle de leurs quarrés, celle de leurs cubes, etc. Car soit l'équation du degré quelconque m, $x^m + fx^{m-1} + gx^{m-2} + hx^{m-3} +$ etc. $= 0$; et nommons a, b, c, etc., ses racines. Cela posé,

1.° La somme des premières puissances des racines, c'est-à-dire, la somme des racines mêmes, ou $a + b + c +$ etc. $= -f$, puisque le coëfficient de l'inconnue dans le second terme est égal à la somme des racines prises avec des signes contraires.

2.° La somme des quarrés des racines, c'est-à-dire, $a^2 + b^2 + c^2 +$ etc. $= f^2 - 2g$. Car si l'on fait le quarré du polynome $a + b + c +$ etc., on trouvera que ce quarré contient la somme des quarrés des termes a, b, c, etc., plus le double de la somme des produits que l'on forme, en multipliant ensemble deux à deux toutes les racines a, b, c, etc.; c'est-à-dire, qu'on aura, $(a + b + c +$ etc.$)^2$ $= a^2 + b^2 + c^2 +$ etc. $+ 2(ab + ac + bc +$ etc.$)$. Or, on a, $(a + b + c +$ etc.$)^2 = f^2$, et $ab + ac + bc +$ etc. $= g$. Ainsi on aura $f^2 = a^2 + b^2 + c^2 +$ etc. $+ 2g$, et par conséquent $a^2 + b^2 + c^2 +$ etc. $= f^2 - 2g$.

3.° La somme des cubes des racines, c'est-à-dire, $a^3 + b^3 + c^3 +$ etc. $= -f^3 + 3fg - 3h$. Car si l'on fait le cube de $a + b + c +$ etc., on trouvera $(a + b + c +$ etc.$)^3$ $= a^3 + b^3 + c^3 +$ etc. $+ 3(a + b + c) \times (ab + ac + bc)$ $- 3abc$. Or, on a $(a + b + c +$ etc.$)^3 = -f^3$, $(a + b + c)$ $\times$ $(ab + ac + bc) = -fg$, $abc = -h$. Nous aurons donc $-f^3 = a^3 + b^3 + c^3 +$ etc. $- 3fg + 3h$; et par conséquent $a^3 + b^3 + c^3 + c^3 +$ etc. $= -f^3 + 3fg - 3h$.

Ainsi de suite pour les autres puissances des racines.

324. Théorème II. *Dans toute équation qui ne contient que des racines réelles,*

I. *Si toutes les racines sont positives, les termes de l'équation auront alternativement le signe + et le signe —.*

II. *Si toutes les racines sont négatives, tous les termes auront le signe +.*

III. *Si les racines sont en partie positives, en partie négatives, il y aura autant de racines positives que de* variations *de signes, et autant de racines négatives que de* permanences *de signes, en prenant ces variations et ces permanences d'un terme au terme suivant, dans toute l'étendue de l'équation.*

Sur quoi on doit observer que si l'équation n'étoit pas complète, il faudroit commencer par la compléter.

La première partie de ce théorème est évidente par l'équation (A) de l'article 317, et la seconde l'est par l'équation (B) du même article.

Pour démontrer la troisième, je prends par exemple l'équation (C) du même article, laquelle a deux racines positives et une négative. Il peut arriver que l'on ait, $c > a + b$, ou $c < a + b$.

Dans le premier cas, le second terme est positif; le troisième est négatif, parce qu'ayant $c > a + b$, on aura $ac + bc > (a + b)^2 > ab$. Et comme le dernier terme est positif, on voit que du premier au second il y a une permanence de signes; que du second au troisième il y a une variation de signes; et que du troisième au quatrième il y a encore une variation de signes. Ainsi il y a, en tout, deux variations de signes et une permanence de signes, c'est-à-dire, autant de variations que de racines positives, et autant de permanences que de racines négatives.

Dans le second cas, le second terme de l'équation est négatif, et le troisième pourra être positif ou négatif. Si ce terme est positif, il y aura du premier au second une variation de signes; du second au troisième encore une variation de signes; et du troisième au quatrième une permanence de signes; ce qui fait, en tout, deux variations et une permanence. Si le troisième terme est négatif, il y aura une variation de signes du premier au second; une

permanence du second au troisième, et une variation du troisième au quatrième; ce qui fait encore deux variations et une permanence. Le nombre de variations de signes est donc, dans ce cas comme dans le premier, le même que celui des racines positives; et le nombre des permanences, le même que celui des racines négatives.

325. *Corollaire.* De là il suit que si l'on sait d'une manière quelconque qu'une équation ne contient que des racines réelles, on connoîtra combien il y en a de positives et combien de négatives. Par exemple, si j'ai l'équation

$$x^5 + 3x^4 - 23x^3 - 27x^2 + 166x - 120 = 0,$$

et que je sois supposé savoir que toutes ses racines sont réelles; je conclurai qu'elle a trois racines positives et deux négatives, parce qu'il y a trois variations et deux permanences de signes. En effet, cette équation contient les trois racines positives, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, et les deux racines négatives, $x = -4$, $x = -5$.

Si l'équation étoit incomplète, il faudroit, suivant la remarque générale qui accompagne l'énoncé du théorême, suppléer les termes absents par zéro, qu'on peut imaginer précédé du signe + ou du signe —. Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 - 20x^3 + 30x^2 + 19x - 30 = 0,$$

dont je sais que toutes les racines sont réelles, et qui n'a point de second terme. Je l'écris ainsi, $x^5 \pm 0x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 19x - 30 = 0$; et j'observe que, soit qu'on prenne le second terme $0x^4$ en + ou en —, il y a dans toute l'étendue de l'équation trois variations et deux permanences de signes. D'où je conclus que l'équation a trois racines positives et deux négatives. En effet, cette équation contient les trois racines positives $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, et les deux racines négatives, $x = -1$, $x = -5$.

On doit bien observer que la règle en question n'a lieu que pour les équations dont toutes les racines sont réelles. Car; par exemple, si on concluoit que l'équation $xx + 2x + 5 = 0$ a ses deux racines négatives, parce que tous ses termes sont positifs, on se tromperoit, les deux racines de l'équation étant imaginaires.

326. Théorème III. *Toute équation peut être transformée en une autre dont les racines soient plus grandes ou plus petites d'une quantité donnée.*

Soit une équation quelconque dont x est l'inconnue, comme par exemple l'une des équations de l'article 317 : faites $x = z + m$, (z étant une nouvelle inconnue, m une quantité donnée positive ou négative); substituez à la place des puissances de x leurs valeurs résultantes de l'hypothèse $x = z + m$; vous aurez une équation dont les racines seront dans le cas du théorème.

327. Théorème IV. *Toute équation peut être transformée en une autre dont les racines soient égales aux racines de la première multipliées ou divisées par une quantité donnée.*

1.° Soit, par exemple, l'équation $t^3 + at^2 + bt + c = 0$: si l'on fait $ft = x$, ou $t = \frac{x}{f}$, on aura la transformée, $x^3 + fax^2 + f^2bx + f^3 c = 0$, dont les racines sont les produits des racines de la proposée, multipliées par la quantité f.

On voit qu'au moyen de cette transformation, une équation qui contient des quantités fractionnaires peut être changée en une autre qui n'en contient pas. Soit, par exemple, l'équation $t^3 + \frac{at^2}{g} + \frac{bt}{h} + \frac{d}{k} = 0$: multipliez tout par le produit des dénominateurs, vous aurez $ghkt^3 + hkat^2 + gkbt + ghd = 0$; ensuite faites $ghkt = x$, ou $t = \frac{x}{ghk}$, vous aurez la transformée $x^3 + hkax^2 + g^2k^2hbx + g^3k^2h^3d = 0$, où il n'y a point de fractions.

La même transformation peut servir à faire disparoître les quantités radicales qui affectent certains termes d'une équation. Soit, par exemple, l'équation $t^3 + at^2 \sqrt{k} + bt + c\sqrt{k} = 0$; faites $t\sqrt{k} = x$, vous aurez la transformée $x^3 + akx^2 + bkx + ck^2 = 0$, où il n'y a point de quantité radicale.

2.° Soit encore, pour exemple, l'équation $t^3 + at^2 + bt + c = 0$: faites $\frac{t}{f} = x$, vousaurez la transformée $x^3 +$

$\frac{ax^2}{f} + \frac{bx}{f^2} + \frac{c}{f^3} = 0$, dont les racines sont égales à celles de la proposée, divisées par la quantité f.

Il est clair qu'on peut transformer par les mêmes moyens une équation en une autre, dont les racines soient à celles de la proposée, dans tel rapport qu'on voudra.

CHAPITRE XIX.

Méthodes pour trouver les diviseurs commensurables qu'une équation peut contenir.

328. Toute équation a autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue. Ces racines sont susceptibles de différentes formes : nous avons déja observé qu'on n'a point encore de méthode pour les trouver généralement, si ce n'est pour les quatre premiers degrés. Mais il y a dans tous les degrés des équations qui peuvent être décomposées en d'autres équations du premier degré, ou du second, ou du troisième, etc. Notre objet présent est de découvrir ces équations composantes, qu'on appelle *diviseurs rationnels* ou *commensurables*, parce qu'il n'y entre point de radicaux. Leurs dimensions s'estiment à l'ordinaire, par celles de l'inconnue qu'elles renferment. Cela doit s'entendre également et pour les équations *littérales*, c'est-à-dire, pour les équations qui, outre l'inconnue, contiennent encore d'autres lettres, et pour les équations *numériques*, c'est-à-dire, pour les équations qui ne contiennent pas d'autre lettre que l'inconnue.

On sent l'utilité de cette recherche; car si une équation est entièrement décomposable en diviseurs d'une dimension, on aura immédiatement toutes ses racines; si elle est décomposable en diviseurs de deux dimensions, il ne s'agira plus, pour avoir les racines, que de résoudre des

équations du second degré ; si, en diviseurs de trois dimensions, on aura les racines en résolvant des équations du troisième degré, etc.

329. Problème I. *Décomposer une quantité rationnelle en ses facteurs rationnels, lorsqu'elle en contient.*

Soit en général une quantité rationnelle A composée, suivant une loi quelconque, de tant d'autres quantités a, b, c, d, etc. qu'on voudra : si cette quantité est telle qu'en mettant, par exemple, a pour b, ou en faisant $b = a$, on ait $A = 0$: je dis que A sera divisible par $a - b$. Car, supposons qu'en divisant A par $a - b$, on ait Q pour quotient et R pour reste ; on aura par les premiers principes de la division, $A = Q(a - b) + R$. Or, par hypothèse, lorsque $a = b$, on a $A = 0$, et on a aussi alors $Q(a - b) = 0$; donc $R = 0$.

330. Exemple I. *Reconnoître si la quantité ou l'équation* $4p^3 - 3b^2p - 4a^3 + 3ab^2 = 0$, *a des diviseurs rationnels.*

On voit, avec la plus légère attention, que si l'on fait $p = a$, tous les termes de cette quantité se détruisent mutuellement. Ainsi, elle est divisible par $p - a$. Donc, en effectuant cette division, et en regardant p comme l'inconnue, l'équation $4p^3 - 3b^2p - 4a^3 + 3ab^2 = 0$, se décomposera en ces deux-ci, $p - a = 0$, $4p^2 + 4ap + 4a^2 - 3b^2 = 0$, dont l'une est du premier degré, l'autre du second.

On trouvera semblablement que $4p^3 + 3p - 2 = (2p - 1) \times (2p^2 + p + 2)$; que $4p^3 + 6p - 10 = (p - 1) \times (4p^2 + 4p + 10)$; que $4p^3 + 3p - 7 = (p - 1) \times (4p^2 + 4p + 7)$; que $4p^3 - 6p + 2 = (p - 1) \times (4p^2 + 4p - 2)$.

331. Exemple II. *Reconnoître si la quantité* $2l^6 - 2l^2m^2n^2 - l^4m^2 - l^4n^2 + m^4n^2 + m^2n^4$, *a des diviseurs rationnels.*

J'observe qu'en supposant $l^2 = mn$, cette [...]
vanouiroit; d'où je conclus qu'elle est divisi[...]
ou par $-l^2 + mn$. Je vois pareil[...]
$l^2 = -mn$, notre quantité s'évan[...]
qu'elle est encore divisible par l^2 [...]
Si l'on effectue successivement [...]

trouvera le troisième facteur $2l^2 - m^2 - n^2$, facteur qu'on auroit pu trouver aussi directement comme les deux autres. Ainsi la quantité proposée $2l^6 - 2l^2m^2n^2 - l^4m^2 - l^4n^2 + m^4n^2 + m^2n^4 = (-l^2 + mn) \times (-l^2 - mn) \times (2l^2 - m^2 - n^2)$.

332. Exemple III. *Reconnoître si l'équation* $x^4 - 2cfx^3 + 2cfga^2x - g^2a^4 = 0$, *a des diviseurs rationnels.*

J'observe qu'en faisant $x^2 = ga^2$, le premier terme de cette équation est détruit par le quatrième, et le second par le troisième ; donc elle est divisible par $x^2 - ga^2$, et par conséquent elle est décomposable en ces deux équations du second degré, $x^2 - ga^2 = 0$, $x^2 - 2cfx + ga^2 = 0$.

333. *Scholie I.* Puisque le dernier terme d'une équation qui est ordonnée par rapport à l'inconnue, et qui a zéro pour second membre, n'est autre chose (320) que le produit de toutes les racines, et que le caractère d'une racine est (317) qu'en la substituant à la place de l'inconnue, la totalité des termes de l'équation s'évanouit ; il s'ensuit que si parmi les diviseurs du dernier terme il s'en trouve qui aient ce caractère, ils seront des racines de l'équation. Ainsi l'équation sera divisible par l'inconnue plus ou moins chacun des diviseurs qui aura la propriété dont je viens de parler. Soit, par exemple, l'équation . . . . . .

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0,$$

dont le dernier terme abc a les trois diviseurs a, b, c. Je vois qu'en substituant successivement chacun de ces diviseurs à la place de l'inconnue, la somme de tous les termes s'évanouit : d'où je conclus que chacun d'eux est une valeur ou racine de l'inconnue ; et que par conséquent l'équation peut être regardée comme composée des trois facteurs ou diviseurs d'une dimension, $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$.

Soit, pour second exemple, l'équation . . . .

$$x^3 - (a - b - c)x^2 + (bc - ab - ac)x - abc = 0,$$

dont le dernier terme abc a les trois diviseurs a, b, c. En substituant d'abord a pour x, la somme de tous les termes

devient zéro; et par conséquent $x - a = 0$ est l'un des diviseurs de l'équation. Si l'on substitue ensuite b pour x, la somme de tous les termes ne s'évanouit pas; mais, en substituant $-b$ pour x, elle s'évanouit; et par conséquent $x + b = 0$ est un second diviseur de l'équation. On trouvera semblablement que $x + c = 0$ est un troisième diviseur.

Il est clair par là qu'on trouvera toujours les diviseurs d'une dimension contenus dans une équation, si l'on cherche tous les diviseurs du dernier terme, et si l'on choisit ceux de ces diviseurs qui, étant substitués, soit en $+$, soit en $-$, à la place de l'inconnue, font disparoître tous les termes de l'équation.

Je suppose toujours que l'équation ordonnée par rapport à l'inconnue, n'ait d'autre coëfficient que l'unité au premier terme, et qu'elle ne contienne point de fractions, forme à laquelle on peut ramener (327) toute équation, si elle ne l'a pas primitivement.

334. Exemple I. *On demande si l'équation* $x^3 + 5x^2 - 44x + 60 = 0$, *a des diviseurs commensurables.*

Tous les diviseurs du dernier terme 60 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Je trouve d'abord qu'en faisant $x = 2$, tous les termes de l'équation se détruisent; donc l'équation est divisible par $x - 2 = 0$. En second lieu, je trouve qu'en faisant $x = 3$, tous les termes s'évanouissent encore; donc l'équation est divisible par $x - 3 = 0$. En troisième lieu, je trouve qu'en faisant $x = -10$, tous les termes se détruisent; donc l'équation est divisible par $x + 10 = 0$. Elle peut donc être regardée comme le produit de trois équations du premier degré, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 10 = 0$.

335. Exemple II. *On demande si l'équation* $x^4 - 5x^3 - 24x^2 + 100x + 48 = 0$, *a des diviseurs commensurables.*

Tous les diviseurs du dernier terme 48 sont 1, 2, 3, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Or je trouve, 1.° qu'en faisant $x =$ tous les termes se détruisent; donc l'équation est divisi. par $x - 4 = 0$. En second lieu, je trouve qu'en faisa

$x=6$, tous les termes se détruisent encore ; donc l'équation est divisible par $x-6=0$. Il n'y a point d'autre diviseur de 48 qui opère la destruction des termes de l'équation. Elle n'a donc pour diviseurs d'une dimension que $x-4=0$, $x-6=0$. Si on la divise successivement par ces deux diviseurs, on trouvera pour quotient l'équation du second degré, $xx+5x+2=0$. L'équation proposée peut donc être regardée comme le produit des trois équations, $x-4=0$, $x-6=0$, $xx+5x+2=0$.

336. *Scholie II.* Newton propose le moyen suivant pour abréger la recherche des diviseurs du dernier terme d'une équation numérique, qui, étant substitués à la place de l'inconnue, peuvent faire disparoître tous les termes de l'équation, ou qui, étant joints en + ou en — avec l'inconnue, peuvent former des diviseurs de l'équation.

Soit une équation quelconque ; par exemple celle-ci, $t^3+at^2+bt+c=0$. Il est clair qu'en supposant $t=x+m$, le dernier terme de la transformée en x sera m^3+am^2+bm+c, c'est-à-dire, la proposée même, dans laquelle on auroit mis m pour t. Donc, si l'on fait successivement $t=x+1$, $t=x$, $t=x-1$, le dernier terme de chaque transformée en x sera, ou $1+a+b+c$, ou c, ou $-1+a-b+c$. Cela posé, puisque dans cette hypothèse on a successivement $x=t-1$, $x=t$, $x=t+1$; on voit qu'afin que l'équation proposée puisse avoir des diviseurs d'une dimension, il faut que les trois quantités $1+a+b+c$, c, $-1+a-b+c$, aient des diviseurs qui forment la progression arithmétique $\div t-1 \,.\, t \,.\, t+1$, dont la différence est 1. De plus, on voit que cette progression est croissante lorsque la valeur de t est positive, et décroissante lorsque, la valeur de t étant négative, on considère simplement les valeurs absolues des trois termes de la progression, abstraction faite de leurs signes ; donc réciproquement il faudra prendre le diviseur de c positivement ou négativement, selon que les valeurs absolues des trois termes qui forment la progression des diviseurs iront en montant ou en descendant.

Il est inutile de soumettre à l'examen des diviseurs de c, qui ne satisferoient pas à ces conditions; et ceux même qui y satisfont peuvent n'avoir pas d'ailleurs la propriété requise.

337. Exemple I. *On demande si l'équation* $t^3 - 5t^2 - 18t + 72 = 0$, *a des diviseurs commensurables.*

Le dernier terme de la première transformée en x, ou de l'équation qui vient en faisant $t = x + 1$, est $1 - 5 - 18 + 72 = 50$; celui de la seconde, dans laquelle $t = x$, est 72; celui de la troisième, dans laquelle $t = x - 1$, est $-1 - 5 + 18 + 72 = 84$. Je place ces trois termes 50, 72, 84, dans une même colonne verticale, et à côté d'eux leurs diviseurs qui forment trois bandes horizontales. L'opération figurée se voit ici.

50	1 . 2 . 5 . 10 . 25 . 50
72	1 . 2 . 3 . 4 . 6 . 8 . 9 . 12 . 18 . 24 . 36 . 72
84	1 . 2 . 3 . 4 . 6 . 7 . 12 . 14 . 21 . 28 . 42 . 84

Cela posé, je trouve d'abord dans les trois bandes horizontales les trois diviseurs 1, 2, 3, qui forment une progression arithmétique croissante dont la différence est 1; et par conséquent il faut essayer si le diviseur moyen 2, pris positivement, et substitué pour t dans l'équation proposée, ne produit pas la destruction de tous ses termes. Mais on trouve que cette destruction n'a pas lieu; d'où je conclus que l'équation n'est pas divisible par $t - 2$.

Les trois diviseurs 2, 3, 4 forment une progression arithmétique croissante dont la différence est 1; ainsi il faut essayer le diviseur moyen $+ 3$. Or, en mettant ce nombre pour t, tous les termes de l'équation se détruisent; donc elle est divisible par $t - 3$.

Les trois diviseurs 5, 4, 3 forment une progression arithmétique décroissante dont la différence est 1; donc

il faut essayer -4. Or, en mettant ce nombre pour t, tous les termes de l'équation se détruisent ; donc elle est divisible par $t+4$.

Les trois diviseurs 5, 6, 7 forment une progression arithmétique croissante dont la différence est 1 ; donc il faut essayer $+6$. Or, en mettant ce nombre pour t, tous les termes de l'équation se détruisent ; donc elle est divisible par $t-6$.

On voit par là que l'équation proposée n'est autre chose que le produit $(t-3)\times(t+4)\times(t-6)=0$.

338. Exemple II. *On demande si l'équation* $t^5-12t^4+5t^3-61^2t+22t-120=0$, *a des diviseurs commensurables.*

Le procédé est le même que dans l'exemple précédent. Le dernier terme de la première transformée en x, où $t=x+1$, est -165; celui de la seconde, où $x=t$, est -120 ; et celui de la troisième, où $x=t-1$, est 221. J'écris les trois nombres 165, 120, 221 dans une colonne verticale, et à côté d'eux leurs diviseurs qui forment trois bandes horizontales ; le tout comme on voit ici.

165	1 . 3 . 5 . 11 . 15 . 33 . 55 . 165
120	1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8 . 10 . 12 . 15 . 20 . 24 . 30 . 40 . 60 . 120
221	1 . 13 . 17 . 221

Cela posé, je trouve d'abord les trois diviseurs 3, 2, 1, qui forment une progression arithmétique décroissante dont la différence est 1. Il faut donc essayer si -2, mis pour t, opère la destruction de tous les termes de l'équation : or il ne l'opère pas, et par conséquent l'équation n'est pas divisible par $t+2$.

Les trois diviseurs 11, 12, 13 forment une progression arithmétique croissante dont la différence est 1. Ainsi il faut essayer si $+12$, mis pour t, opère la destruction de tous les termes de l'équation ; ou bien, ce qui sera plus

court, on essaiera de diviser l'équation par $t-12$; et comme la division réussit, on voit que l'équation a $t-12$ pour diviseur d'une dimension.

En divisant l'équation proposée par $t-12=0$, on trouvera l'équation $t^4+5t^2-t+10=0$, qui n'est plus que du quatrième degré, et qui se résoudra par les formules de ce degré.

339. *Scholie III.* Je passe à une autre méthode, qu'on appelle ordinairement la *méthode des coëfficients indéterminés*, et qui est d'un usage simple et commode dans la pratique. On a déja indiqué (144) l'esprit de ce moyen, lorsqu'il étoit question d'établir la formule pour élever un binome à une puissance fractionnaire positive ou négative. Cette méthode s'applique ici facilement aux diviseurs rationnels de toutes sortes de dimensions; mais il suffira de l'expliquer pour les diviseurs d'une dimension, ou de deux dimensions : nos lecteurs l'étendront eux-mêmes sans peine aux diviseurs plus élevés.

340. Problême II. *Trouver par la méthode des coëfficients indéterminés, les diviseurs d'une dimension qui peuvent être contenus dans une équation.*

Soit l'équation $t^4+at^3+bt^2+ct+d=0$, qui est supposée contenir un diviseur d'une dimension. Cette équation étant du quatrième degré, je puis la regarder comme le produit de l'équation du troisième degré $t^3+At^2+Bt+C=0$ par l'équation du premier $t+D=0$; A, B, C, D, étant des quantités indéterminées qui se trouveront en identifiant terme à terme l'équation résultante $(t^3+At^2+Bt+C)\times(t+D)=0$, ou $t^4+(A+D)t^3+(B+DA)t^2+(C+DB)t+CD=0$, avec l'équation proposée $t^4+at^3+bt^2+ct+d=0$. On aura donc $A+D=a$; $B+DA=b$; $C+DB=c$; $CD=d$. Ces quatre dernières équations contiennent tout ce qu'il faut pour déterminer les quatre inconnues A, B, C, D, dans la supposition que D étant une quantité rationnelle, l'équation proposée soit divisible par l'équation du premier degré $t+D=0$.

En effet, nous voyons par l'équation $CD = d$, que les deux quantités C et D doivent être diviseurs de d, puisque leur produit CD est d. Ainsi, décomposons la quantité d en tous ses facteurs ; et supposant que D soit un de ces facteurs, C le produit de tous les autres, examinons si ce facteur D a les conditions requises pour qu'on ait les trois autres équations $A + D = a$, $B + DA = b$, $C + DB = c$. Or, l'équation $A + D = a$ donne $A = a - D$, quantité connue, puisque a est donné et que D est un facteur connu de d. L'équation $B + DA = b$ donne $B = b - DA$, quantité pareillement connue. L'équation $C + DB = c$ donne $C = c - DB$. Cette valeur de C, qui est connue, doit être identique avec celle qui résulte de la division de d par D, afin que l'équation proposée $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ soit divisible par $t + D$. Si cette identité n'a pas lieu, on éprouvera un autre diviseur; et si par toutes ces épreuves on ne trouve pas les mêmes valeurs pour C, on conclura que l'équation $t^4 + at^3 +$ etc. n'a pas de diviseur rationnel d'une dimension. On doit éprouver les diviseurs D, en les prenant positivement ou négativement.

Il est clair que si $t \pm D$ est en effet diviseur de $t^4 + at^3 +$ etc., on connoîtra par les opérations qu'on a faites pour éprouver D, les quantités A, B, C, et par conséquent les coëfficients des termes de l'équation du troisième degré $t^3 + At^2 + Bt + C = 0$, qui est une des composantes de l'équation du quatrième, $t^4 + at^3 +$ etc.

Si l'équation $t^3 + At^2 + Bt + C = 0$ est supposée contenir un diviseur d'une dimension, on le trouvera en regardant cette équation comme le produit d'une équation du second degré par une équation du premier. Même observation pour l'équation du second degré.

Si une équation du cinquième degré contient un diviseur d'une dimension, on le trouvera en regardant cette équation comme composée d'une équation du quatrième degré, et d'une équation du premier; ainsi des autres.

341. Exemple. *Résoudre l'équation* $ar^n - a - rs + s = o$, *ou* $r^n - \frac{rs}{a} + \frac{s}{a} - 1 = o$, *trouvée* (187, Quest. IX); *en supposant ici*, $a = 54$, $s = 80$, $n = 4$.

La question dont il s'agit consiste en général à trouver, dans une progression géométrique, la raison et le dernier terme, lorsque l'on connoît le premier terme, la somme et le nombre des termes de la progression. Dans le cas présent, le premier terme est 54; le nombre des termes est 4; la somme est 80; et on demande la raison $\frac{1}{r}$.

Or, la détermination de cette quantité dépend de la résolution de l'équation suivante du quatrième degré, dans laquelle r est l'inconnue :

$$(A) \quad r^4 - \frac{40r}{27} + \frac{13}{27} = o.$$

Comme cette équation a des termes fractionnaires, je commence par la transformer (327) en une autre qui n'en contienne point, en faisant $r = \frac{t}{27}$; ce qui donne

$$t^4 - 40\,(27)^2 \, . \, t + 13 \, . \, (27)^3 = o.$$

Voyons maintenant, par la méthode qui vient d'être exposée, si cette dernière équation contient quelque diviseur rationnel d'une dimension.

On voit qu'elle se rapporte à la formule $(t^3 + At^2 + Bt + C) \times (t + D) = o$, ou $t^4 + (A + D)\,t^3 + (B + DA)\,t + (C + DB)\,t + CD = o$, en supposant $A + D = o$, $B + AD = o$, $C + DB = -40 \, . \, (27)^2$, $CD = 13 \, . \, (27)^3$.

Les diviseurs du dernier terme sont, 1, 3, 13, 9, 27, $(27)^2$, $(27)^3$, $3 \, . \, 27$, $3 \, . \, (27)^2$, $9 \, . \, 27$, $9 \, . \, (27)^2$, $13 \, . \, 27$, $13 \times (27)^2$, $13 \, . \, (27)^3$. D'abord la supposition de $D = \pm 1$ ne réussit pas; on peut s'en assurer par la méthode du présent article : mais il sera plus court d'employer pour cela la méthode de l'article 329, parce que toutes les puissances de 1 étant 1, on voit presque sans calcul si la totalité des termes de l'équation se réduit à zéro.

En supposant $D = 3$, et par conséquent $C = \frac{13.(27)^2}{3}$ $= 13 . 3^2 . (27)^2$, nous aurions $A = -3$, $B = 9$, $C = -40(27)^2 - 27$. Or cette dernière valeur de C n'étant pas la même que la précédente, il s'ensuit que notre équation n'est pas divisible par $t + 3$. On trouvera aussi qu'elle n'est pas divisible par $t - 3$.

Supposons $D = -9$, et par conséquent $C = -13.3 \times (27)^2$; nous aurons $A = 9$, $B = 3.27$, $C = -3.13.(27)^2$. Ainsi les valeurs de C sont les mêmes, et par conséquent l'équation est divisible par $t - 9$; ce qui donne $t = 9$, $r = \frac{1}{3}$, et $\frac{1}{r} = 3$. Cette valeur de $\frac{1}{r}$ satisfait aux conditions de la question; en effet, les quatre termes de la progression sont alors 54, 18, 6, 2, et la somme est 80.

Le calcul précédent est un peu compliqué : je le donne à dessein de faire voir comment il faut procéder lorsque le dernier terme de l'équation a un grand nombre de diviseurs. Mais il est aisé de remarquer que si l'on fait $r = \frac{y}{3}$, l'équation (A) se changera en celle-ci $y^4 - 40y + 39 = 0$, où tout se détruit lorsque $y = 1$. Ainsi $r = \frac{1}{3}$.

342. Problème III. *Trouver par la même méthode les diviseurs de deux dimensions qui peuvent être contenus dans une équation.*

Soit l'équation $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$. Je feins que cette équation est le produit des deux facteurs du second degré $t^2 + mt + n = 0$, $t^2 + pt + q = 0$. Ces deux facteurs multipliés ensemble donnent,

$$t^4 \left.\begin{matrix} +m \\ +p \end{matrix}\right\} t^3 \left.\begin{matrix} +n \\ +mp \\ +q \end{matrix}\right\} t^2 \left.\begin{matrix} +np \\ +mq \end{matrix}\right\} t + nq = 0,$$

équation dont les termes doivent être les mêmes que ceux de la proposée. Ainsi n et q doivent être des diviseurs de d; de sorte que l'une de ces deux lettres n, q étant regardée comme connue, l'autre le sera aussi. Comparons terme à terme nos deux équations; nous aurons $m + p = a$, $n +$

$mp + q = b$, $np + mq = c$, $nq = d$. La première et la troisième de ces équations donnent $m = a - p$, $m = \frac{c - np}{q}$, ou (en mettant pour q sa valeur $\frac{d}{n}$ donnée par la quatrième équation), $m = \frac{cn - n^2p}{d}$. Egalant entre elles les deux valeurs de m, on aura $a - p = \frac{cn - n^2p}{d}$. Donc $p = \frac{ad - nc}{d - n^2}$, et $m = \frac{cn - an^2}{d - n^2}$. Ces deux valeurs de p et de m doivent être telles que la seconde équation $n + mp + q = b$ ait lieu en même temps.

Si dans les applications numériques de ces formules, on trouvoit pour m ou p des nombres fractionnaires, il faudroit rejetter les suppositions qui les auroient amenés, parce que les nombres a, b, c, m, n, p, q sont des entiers, ou directement, ou par les transformations des équations.

343. Exemple. *On demande si l'équation* $t^4 + 5t^3 + 14t^2 + 19t + 15 = 0$, *a des diviseurs de deux dimensions.*

Cette équation se rapporte à la formule $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$, en faisant $a = 5$, $b = 14$, $c = 19$, $d = 15$. Les diviseurs du dernier terme 15 sont 1, 3, 5, 15.

Supposons $n = 1$, et par conséquent $q = 15$: on aura $p = 4$, $m = 1$; de plus on devroit avoir $1 + 4 + 15 = 14$, ce qui n'est pas ; d'où je conclus que cette supposition doit être rejetée.

Supposons $n = 3$, et par conséquent $q = 5$: on aura $p = 3$, $m = 2$; de plus on doit avoir $3 + 6 + 5 = 14$; ce qui est vrai ; donc la supposition est vraie. Substituant donc pour m, p, n, q leurs valeurs dans les équations composantes $t^2 + mt + n = 0$, $t^2 + pt + q = 0$, elles deviendront $t^2 + 2t + 3 = 0$, $t^2 + 3t + 5 = 0$, et seront chacune un diviseur de deux dimensions de l'équation proposée $t^4 + 5t^3 + 14t^2 + 19t + 15 = 0$.

CHAPITRE XX.

Des équations qui contiennent des racines égales.

344. Il y a des équations qui contiennent plusieurs racines égales et de même signe. Par exemple, l'équation $(t-a) \times (t-a) \times (t-b) \times (t-c) = 0$, a ses deux premières racines égales et positives. La méthode pour trouver directement et séparément ces sortes de racines est fondée sur quelques nouveaux principes que nous allons établir.

345. Lemme I. *Si on développe la puissance* n *d'un binome* h + t, *c'est-à-dire* $(h+t)^n$, *et qu'on la multiplie terme à terme par la progression arithmétique* 0, 1, 2, 3, 4, etc. : *le produit sera* $= nt(h+t)^{n-1}$.

Ce théorême est évident par le calcul suivant,

$$(h+t)^n = h^n + nh^{n-1}t + \frac{n(n-1)h^{n-2}t^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)h^{n-3}t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \text{etc.}$$

$$\text{produit} = nh^{n-1}t + \frac{n(n-1)h^{n-2}t^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)h^{n-3}t^3}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

$$= nt(h^{n-1} + (n-1)h^{n-2}t + \frac{(n-1)(n-2)h^{n-3}t^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

$$= nt(h+t)^{n-1}.$$

346. *Corollaire I.* De là il suit que si l'on multiplie la puissance $(h+t)^n$ développée, par la progression $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, $4k$, etc., le produit sera $= knt(h+t)^{n-1}$. Car multiplier par $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, etc. c'est multiplier d'abord par 0, 1, 2, 3, etc. ce qui donne $nt(h+t)^{n-1}$, et puis multiplier le tout par k, ce qui donne $knt(h+t)^{n-1}$.

Si on avoit $M(h+t)^n$, (M étant un facteur quelconque), et qu'après avoir développé la puissance $(h+t)^n$, on multipliât par la progression arithmétique $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, etc., le produit seroit $Mknt(h+t)^{n-1}$, comme il est évident.

347. *Corollaire II.* Il suit encore que si l'on a $M(h+t)^n$, et qu'après avoir développé la puissance $(h+t)^n$, on la

multiplie par la progression arithmétique quelconque m, $m+k$, $m+2k$, $m+3k$, etc. le produit sera $=(\mathrm{M}mh+\mathrm{M}mt+\mathrm{M}knt).(h+t)^{n-1}$. En effet, multiplier par la progression m, $m+k$, $m+2k$, $m+3k$, etc., c'est multiplier d'abord par m, ce qui donne $\mathrm{M}m(h+t)^n=(\mathrm{M}mh+\mathrm{M}mt).(h+t)^{n-1}$, et ensuite par la progression $0k$, $1k$, $2k$, $3k$, etc.; ce qui donne $\mathrm{M}knt\,(h+t)^{n-1}$. Donc le produit total $=(\mathrm{M}mh+\mathrm{M}mt+\mathrm{M}knt).(h+t)^{n-1}$.

348. Lemme II. *Si l'on multiplie les termes d'une équation qui contient des racines égales par ceux d'une progression arithmétique quelconque; le produit sera une équation qui contiendra les mêmes racines égales, moins une.*

En effet, soit l'équation $0=a+bt+ct^2+dt^3+$ etc. (t étant l'inconnue; a, b, c, etc. des quantités données), laquelle est censée contenir un nombre n de racines égales, que je présente chacune par $-h$, et par conséquent être divisible par $(h+t)^n$. Cette équation peut contenir de plus un nombre quelconque d'autres racines. Il est clair que nous pouvons l'écrire ainsi $0=(h+t)^n\times(p+qt+rt^2+st^3+$ etc.$)$, en supposant que le facteur $p+qt+rt^2+$ etc., dans lequel p, q, r, etc. sont des quantités données, représente le quotient que l'on trouveroit si l'on divisoit l'équation proposée par $(h+t)^n$. Donc en effectuant la multiplication indiquée, nous aurons $0=p(h+t)^n+qt(h+t)^n+rt^2(h+t)^n+st^3(h+t)^n+$ etc., ou bien, en développant la puissance $(h+t)^n$, et ordonnant par rapport à t,

$$0=\left\{\begin{array}{l} ph^n+pnh^{n-1}t+\dfrac{pn(n-1)h^{n-2}t^2}{1.2}+\dfrac{pn(n-1)(n-2)h^{n-3}t^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\ \quad+qh^nt+qnh^{n-1}t^2+\dfrac{qn(n-1)h^{n-2}t^3}{1.2}+\text{etc.}\\ \quad\quad+rh^nt^2\quad+rnh^{n-1}t^3+\text{etc.}\\ \quad\quad\quad+sh^nt^3+\text{etc.}\end{array}\right.$$

Maintenant écrivons sous ces suites la progression arithmétique

m, $m+k$, $m+2k$, $m+3k$, etc.

et multiplions chaque bande horizontale par la progres-

sion arithmétique correspondante; c'est-à-dire, la première bande par la progression arithmétique entière m, $m+k$, $m+2k$, $m+3k$, etc.; la seconde par la progression $m+k$, $m+2k$, $m+3k$, etc.; la troisième par la progression $m+2k$, $m+3k$, etc. ainsi de suite. Il est évident que par là on aura multiplié l'équation proposée par la progression arithmétique m, $m+k$, $m+2k$, $m+3k$, etc., puisque la première colonne verticale est multipliée par m, la seconde colonne verticale par $m+k$, la troisième colonne verticale par $m+2k$, etc. Or, avant la multiplication de chaque bande horizontale par la progression arithmétique correspondante, cette bande étoit divisible par $(h+t)^n$. Donc (347), après la multiplication, chaque bande sera divisible par $(h+t)^{n-1}$; et par conséquent l'équation résultante de cette multiplication sera aussi divisible par $(h+t)^{n-1}$. Ainsi on aura une équation qui contiendra les mêmes racines égales, moins une, que l'équation proposée.

349. *Remarque.* Il peut se faire qu'une équation contienne plusieurs racines égales de différentes espèces. Telle est, par exemple, l'équation $(t-a)^2 \times (t-b)^2 \times (t-c) = 0$, qui, outre la racine c, a deux racines dont chacune vaut a, et deux racines dont chacune vaut b. Supposons en général qu'une équation dont t est l'inconnue contienne tout à-la-fois un nombre n de racines égales représentées chacune par $-h$, un nombre e de racines égales représentées chacune par $-f$, un nombre g de racines égales représentées chacune par $-l$, etc. Si l'on multiplie les termes de cette équation par ceux d'une progression arithmétique quelconque, le produit sera une équation qui contiendra les mêmes racines égales moins une de chaque espèce, ou qui sera divisible par $(h+t)^{n-1} \times (f+t)^{e-1} \times (l+t)^{g-1} \times$ etc. Car, si l'on suppose que l'équation générale de l'article précédent contienne les puissance. $(h+t)^n$, $(f+t)^e$, $(l+t)^g$, etc., et qu'on regarde successivement le produit de toutes ces puissances, moins une, comme fondu dans le facteur $p+qt+$

$rt^2 + st^3 +$ etc., on verra qu'en multipliant par les termes d'une progression arithmétique, on aura une équation qui sera divisible ou par $(h + t)^{n-1}$, ou par $(f + t)^{e-1}$, ou par $(l + t)^{g-1}$, etc. D'où il suit que cette même équation sera divisible par le produit $(h + t)^{n-1} \times (f + t)^{e-1} \times (l + t)^{g-1} \times$ etc.

350. Problème. *Reconnoître si une équation contient des racines égales, et, supposé qu'elle en contienne, déterminer ces racines.*

Après avoir ordonné l'équation par rapport à l'inconnue je la multiplie terme à terme par une progression arithmétique. Si l'équation n'étoit pas complète, on commenceroit par la compléter, en imaginant que les puissances de l'inconnue, qui manquent, sont multipliées par zéro. Ainsi, pour l'équation $o = c + at^2 + t^5$, qui n'a ni second, ni quatrième, ni cinquième terme, on écriroit $o = c \pm ot + at^2 \pm ot^3 \pm ot^4 + t^5$. Le choix de la progression arithmétique est arbitraire; mais pour plus de simplicité dans les résultats, il faut prendre la plus simple des progressions arithmétiques, qui est o, 1, 2, 3, 4, etc. En effectuant la multiplication que nous venons d'indiquer, on aura une nouvelle équation, que j'appelle *secondaire*, et qui contient les racines égales, moins une, de l'équation principale, supposé qu'effectivement l'équation principale contienne de telles racines. On cherchera par l'article 90 le plus grand commun diviseur de ces deux équations ordonnées par rapport à l'inconnue. Si elles n'ont point d'équation pour diviseur commun, on conclura que l'équation principale ne contient pas des racines égales; si elles ont un tel diviseur, l'équation principale aura quelques racines égales; et voici les différents cas qui pourront arriver.

1.° Si le plus grand diviseur commun est une équation du premier degré, l'équation principale a deux racines égales, dont chacune est la racine de ce même diviseur.

2.° Si le plus grand commun diviseur est une équation du second degré, on décomposera ce diviseur en ses racines; et si elles sont égales, l'équation principale a trois

racines égales dont chacune est l'une des racines du diviseur : si les racines du diviseur sont inégales, l'équation principale a deux racines égales d'une espèce, et deux racines égales d'une autre espèce ; l'une des racines égales de la première espèce est l'une des racines du diviseur, et l'une des racines égales de la seconde espèce est l'autre racine du diviseur.

3.° Si le plus grand diviseur commun est une équation du troisième degré, on cherchera ses trois racines ; si ces trois racines sont égales, l'équation principale contient quatre racines, égales chacune à l'une des trois racines du diviseur : si deux racines seulement du diviseur sont égales, l'équation principale contient trois racines égales d'une espèce, lesquelles sont chacune l'une des deux racines égales du diviseur, et deux racines égales d'une seconde espèce, lesquelles sont chacune la troisième racine du diviseur : si les trois racines du diviseur sont inégales, l'équation principale contient deux racines égales d'une première espèce, lesquelles sont chacune la première racine du diviseur, deux racines égales d'une seconde espèce, lesquelles sont chacune la seconde racine du diviseur, et deux racines égales d'une troisième espèce, lesquelles sont chacune la troisième racine du diviseur ; ainsi de suite.

351. Exemple I. *On demande si l'équation* $t^3 - t^2 - 8t + 12 = 0$, *a des racines égales.*

Je multiplie cette équation terme à terme par la progression arithmétique 3, 2, 1, 0 ; ce qui produit l'équation secondaire, $3t^3 - 2t^2 - 8t = 0$, ou bien (en divisant tout par la racine $t = 0$), $3t^2 - 2t - 8 = 0$. Je cherche le plus grand diviseur commun à l'équation principale et à l'équation secondaire. Ce diviseur est $t - 2$. D'où il suit que l'équation proposée a deux racines égales, exprimées par $t = 2$, $t = 2$. De ces deux racines résulte l'équation $(t - 2) \times (t - 2) = 0$, ou $t^2 - 4t + 4 = 0$, par laquelle divisant l'équation donnée $t^3 - t^2 - 8t + 12 = 0$, on a pour quotient $t + 3 = 0$: ainsi les trois racines de l'équation $t^3 - t^2 - 8t + 12 = 0$, sont $t = 2$, $t = 2$, $t = -3$.

352. Exemple II. *On demande si l'équation* $t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 28t - 24 = 0$, *a des racines égales.*

Je multiplie cette équation par la progression arithmétique 4, 3, 2, 1, 0; ce qui donne l'équation secondaire $4t^3 - 9t^2 - 12t + 28 = 0$. Ensuite je cherche le plus grand diviseur commun à l'équation principale et à l'équation secondaire. Ce diviseur est l'équation du second degré $t^2 - 4t + 4 = 0$, qui contient les deux racines égales $t = 2$, $t = 2$. D'où je conclus que l'équation proposée a trois racines égales, dont chacune vaut 2. De ces trois racines résulte l'équation $(t - 2) \times (t - 2) \times (t - 2) = 0$, ou $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$, par laquelle divisant l'équation $t^4 - 3t^3 - 6t^2 + 28t - 24 = 0$, on a pour quotient $t + 3$. Ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont $t = 2$, $t = 2$, $t = 2$, $t = -3$.

353. Exemple III. *On demande si l'équation* $t^4 - 10t^3 + 37t^2 - 60t + 36 = 0$, *a des racines égales.*

Ayant multiplié cette équation par la progression arithmétique 4, 3, 2, 1, 0, ce qui donne l'équation secondaire $4t^3 - 30t^2 + 74t - 60 = 0$, je cherche le plus grand diviseur commun à cette équation et à l'équation principale. Ce diviseur est l'équation du second degré $t^2 - 5t + 6 = 0$, laquelle donne les deux racines inégales $t = 2$, $t = 3$. D'où je conclus que l'équation proposée $t^4 - 10t^3 + 37t^2 - 60t + 36 = 0$, a deux racines égales, dont chacune vaut 2, et deux racines égales, dont chacune vaut 3. En effet, cette équation n'est autre chose que $(t - 2)^2 \times (t - 3)^2 = 0$.

354. Exemple IV. *On demande si l'équation* $t^5 - 13t^4 + 67t^3 - 171t^2 + 216t - 108 = 0$, *a des racines égales.*

Formons à l'ordinaire l'équation secondaire $5t^4 - 52t^3 + 201t^2 - 342t + 216 = 0$, en multipliant l'équation proposée par la progression arithmétique 5, 4, 3, 2, 1, 0. Cherchons le plus grand diviseur commun à l'équation principale et à l'équation secondaire. Ce diviseur est l'équation du troisième degré $t^3 - 8t^2 + 21t - 18 = 0$. Or, on trouve, toujours par les mêmes moyens, que cette équation contient les deux racines égales $t = 3$, $t = 3$, et

la troisième racine $t = 2$. Ainsi l'équation proposée $t^5 - 13t^4 + 67t^3 - 171t^2 + 216t - 108 = 0$, a trois racines égales, dont chacune vaut 3, et deux racines égales, dont chacune vaut 2. En effet, cette équation n'est autre chose que $(t-3)^3 \times (t-2)^2 = 0$.

CHAPITRE XXI.

Des changements de forme qu'on peut faire subir à certaines quantités radicales.

355. On a vu (chap. XV et XVI) que les formules générales pour la résolution des équations du troisième et du quatrième degré contiennent différents signes radicaux. Les uns affectent des quantités purement rationnelles ou *commensurables* (1); les autres des quantités en partie rationnelles, en partie radicales ou *incommensurables*. Les premiers disparoissent lorsque les quantités qu'ils précèdent sont des puissances parfaites de même exposant que l'indice de la racine; car alors la racine se tire par les méthodes du chap. VII. Les seconds peuvent disparoître aussi en certains cas. Il y a de même dans les degrés supérieurs au quatrième, des classes d'équations dont les parties affectées de radicaux peuvent être ramenées à des formes plus simples. Je me propose ici d'expliquer la méthode pour faire ces transformations lorsqu'elles sont possibles.

356. Problème I. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la formule* $A \pm \sqrt{B}$, *dans laquelle* A *et* B *sont des quantités rationnelles, simples ou composées.*

---

(1) Les expressions *quantité rationnelle*, *quantité commensurable*, sont synonymes, de même que les expressions *quantité radicale*, *quantité incommensurable*. Les quantités rationnelles ont toujours avec l'unité un rapport assignable ou mesurable; par exemple, la fraction $\frac{3}{4}$ est à l'unité comme 3 est à 4. Mais les vraies quantités radicales n'ont avec l'unité aucun rapport qu'on puisse assigner rigoureusement en nombres finis; par exemple, on ne peut pas déterminer exactement en nombre fini la racine quarrée de 2.

Quelle que soit la racine quarrée de $A \pm \sqrt{B}$, il est évident qu'elle ne peut contenir que des radicaux du second degré; autrement elle produiroit des radicaux d'une autre espèce dans $A \pm \sqrt{B}$. Ainsi, en supposant que p et q sont des quantités rationnelles, la racine ne peut avoir que la forme $p \pm \sqrt{q}$, qui ne contient qu'un seul radical du second degré, ou la forme $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$, qui contient deux radicaux du second degré. Attribuons-lui la forme $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$, qui est la plus générale, et qui comprend d'ailleurs la première lorsque p est un quarré parfait. En élevant $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$ au quarré, nous aurons $p + q \pm 2\sqrt{pq}$, quantité qui doit être égale à $A \pm \sqrt{B}$. Et comme les quantités p, q sont arbitraires, nous pouvons égaler la partie rationnelle $p + q$ à la partie rationnelle A, et la partie radicale $\pm 2\sqrt{pq}$ à la partie radicale $\pm \sqrt{B}$; ce qui nous donnera les deux équations $p + q = A$, $2\sqrt{pq} = \sqrt{B}$; d'où l'on tire $A^2 = (p + q)^2$, $B = 4pq$. Donc $A^2 - B = (p + q)^2 - 4pq = pp + qq - 2pq = (p - q)^2$, et $\sqrt{(A^2 - B)} = p - q$, quantité rationnelle. Ainsi, lorsque la formule $A \pm \sqrt{B}$ est un quarré parfait, la quantité $A^2 - B$ est nécessairement un autre quarré parfait; et comme cette quantité est purement rationnelle, on en tirera la racine quarrée par la méthode de l'art. 109. Si donc, en suivant cette méthode, on trouvoit que $A^2 - B$ n'a pas de racine exacte, ou n'est pas un quarré parfait, on concluroit que réciproquement $A \pm \sqrt{B}$ n'est pas non plus un quarré parfait, et on seroit dispensé de pousser le calcul plus loin.

Je suppose ici que $A^2 - B$ soit un quarré parfait, et je représente sa racine par K. Puisqu'on a $\sqrt{(A^2 - B)} = p - q$, on aura $p - q = \pm K$. Ajoutant l'équation $p - q = \pm K$ avec l'équation $p + q = A$, puis retranchant l'une de l'autre, on trouvera $p = \frac{A \pm K}{2}$, $q = \frac{A \mp K}{2}$. Donc

$$\sqrt{p} \pm \sqrt{q} = \sqrt{\left(\frac{A \pm K}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{A \mp K}{2}\right)},$$ ce qui est la racine demandée. Nous emploierons simplement les signes supérieurs de K.

Au lieu de prendre pour racine, $+ (\sqrt{p} \pm \sqrt{q})$, on

peut prendre aussi $-(\sqrt{p} \pm \sqrt{q})$; mais nous nous en tiendrons à la première expression, pour abréger.

357. Exemple I. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité numérique* $28 \pm 10\sqrt{3}$.

Nous avons ici $A = 28$, $\sqrt{B} = 10\sqrt{3}$, $A^2 - B = 784 - 300 = 484$, dont la racine quarrée est 22. Ainsi $p = \frac{28+22}{2} = 25$, et $\sqrt{p} = 5$; $q = \frac{28-22}{2} = 3$, et $\sqrt{q} = \sqrt{3}$. La racine quarrée de la quantité proposée est donc $5 \pm \sqrt{3}$.

358. Exemple II. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité* $ab + 4c^2 - d^2 \pm 2\sqrt{(4abc^2 - abd^2)}$.

Nous avons ici $A = ab + 4c^2 - d^2$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{(4abc^2 - abd^2)}$; $A^2 - B = a^2b^2 - 8abc^2 + 16c^4 + 2abd^2 - 8c^2d^2 + d^4$, dont la racine quarrée est $ab - 4c^2 + d^2$. Donc $p = \frac{ab + 4c^2 - d^2}{2} + \frac{ab - 4c^2 + d^2}{2} = ab$, et $\sqrt{p} = \sqrt{ab}$; $q = \frac{ab + 4c^2 - d^2 - (ab - 4c^2 + d^2)}{2} = 4c^2 - d^2$, et $\sqrt{q} = \sqrt{(4c^2 - d^2)}$. Ainsi la racine de la quantité proposée est $\sqrt{ab} \pm \sqrt{(4c^2 - d^2)}$; somme ou différence de deux quantités radicales, prises positivement ou négativement.

359. Exemple III. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité* $3a^2 - b^2 \pm 4b\sqrt{(5a^2 - c^2)}$.

Nous avons ici $A = 3a^2 - b^2$, $\sqrt{B} = 4b\sqrt{(5a^2 - c^2)}$; $A^2 - B = 9a^4 - 86a^2b^2 + b^4 + 16b^2c^2$, ce qui n'est pas un quarré parfait. D'où il suit que la quantité proposée n'en est pas un non plus, et que par conséquent l'extraction de la racine ne peut se faire que par approximation.

360. Problême II. *Extraire, lorsque la chose est possible, la racine quarrée d'une formule qui contient une partie rationnelle et plus d'un radical du second degré.*

J'observe d'abord que le quarré du binome $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$ contient une partie rationnelle positive, et une partie radicale positive ou négative, c'est-à-dire, précédée du signe + ou du signe —; que si l'on fait le quarré du tri-

nome $\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$, ce quarré contiendra une partie rationnelle positive, et trois parties radicales, dont une toujours sera positive, et les deux autres positives ou négatives; que si l'on fait le quarré du quadrinome $\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r} \pm \sqrt{s}$, ce quarré contiendra une partie rationnelle positive, et six parties radicales du second degré, dont trois seront positives, et les trois autres positives ou négatives; ainsi de suite.

Cela posé, qu'il s'agisse d'extraire, par exemple, la racine quarrée de la formule, $A \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} + \sqrt{D}$; A, B, C, D étant des quantités rationnelles données. Je feins que la racine cherchée soit $\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$. Ainsi $A \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} + \sqrt{D} = (\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r})^2 = p + q + r \pm 2\sqrt{pq} \pm 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Egalant la partie rationnelle à la partie rationnelle et les parties radicales aux parties radicales; on aura $A = p + q + r$; $\pm \sqrt{B} = \pm 2\sqrt{pq}$; $\pm \sqrt{C} = \pm 2\sqrt{pr}$; $+\sqrt{D} = +2\sqrt{qr}$. Donc $A^2 - B - C = (p + q + r)^2 - 4pq - 4qr = (q + r - p)^2$; $A^2 - B - D = (p + q + r)^2 - 4pq - 4qr = (p + r - q)^2$; $A^2 - C - D = (p + q + r)^2 - 4pr - 4qr = (p + q - r)^2$. Par où l'on voit que si la formule proposée $A \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} + \sqrt{D}$ est effectivement un quarré parfait, les trois quantités rationnelles $A^2 - B - C$, $A^2 - B - D$, $A^2 - C - D$, auront pour racines des quantités rationnelles, ou en d'autres termes, seront des quarrés parfaits. On essaiera donc d'en tirer les racines par la méthode de l'article 109; et si on ne leur trouvoit pas de racines exactes, on concluroit, sans aller plus loin, que la formule proposée n'est pas un quarré parfait.

Supposons ici que $A^2 - B - C$, $A^2 - B - D$, $A^2 - C - D$, soient des quarrés parfaits, et nommons respectivement M, N, P leurs racines. On aura donc $q + r - p = \pm M$; $p + r - q = \pm N$; $p + q - r = \pm P$. Ajoutant successivement la troisième de ces équations avec la seconde, la troisième avec la première, la seconde avec la première; on trouvera $p = \pm \frac{N}{2} \pm \frac{P}{2}$; $q = \pm \frac{M}{2} \pm \frac{P}{2}$; $r = \pm \frac{M}{2} \pm \frac{N}{2}$. Ainsi, en tirant les racines quarrées de ces expres-

sions, on connoîtra toutes les parties de la racine supposée $\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \pm \sqrt{r}$.

Quant au signe qui doit affecter chacune des quantités M, N, P, on le déterminera dans chaque cas particulier, en considérant qu'il doit être tel qu'on ait $p+q+r=A$.

361. Exemple I. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité* $10 \pm \sqrt{60} \pm \sqrt{40} + \sqrt{24}$.

En comparant cette expression avec la formule $A \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} + \sqrt{D}$, nous aurons $A=10$, $B=60$, $C=40$, $D=24$. Ainsi $A^2-B-C=0$, et $M=0$; $A^2-B-D=16$, et $N=\pm 4$; $A^2-C-D=36$, et $P=\pm 6$. D'où l'on voit d'abord que la quantité proposée est un quarré parfait. Donnons le signe + aux quantités N et P; nous trouverons $p=5$, $q=3$, $r=2$, et $p+q+r=10$, ce qui est la valeur de A; donc cette supposition est légitime, et la racine quarrée de $10 \pm \sqrt{60} \pm \sqrt{40} + \sqrt{24}$ est $\sqrt{5} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

362. Exemple II. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité* $28 \pm \sqrt{320} \pm \sqrt{448} + \sqrt{140}$.

Nous avons ici $A=28$, $B=320$, $C=448$, $D=140$. Donc $A^2-B-C=16$, et $M=\pm 4$; $A^2-B-D=324$, et $N=\pm 18$; $A^2-C-D=196$, et $P=\pm 14$. Par où l'on voit que la quantité proposée est un quarré parfait. En donnant le signe + aux trois quantités M, N, P, on trouveroit $p=16$, $q=9$, $r=11$; et $p+q+r=36$, ce qui n'est pas la valeur de A; donc cette supposition doit être rejetée. Donnons le signe — à M, et le signe + à N et à P; nous trouverons $p=16$, $q=5$, $r=7$, et $p+q+r=28$, ce qui est la valeur de A; donc la supposition dont il s'agit est légitime, et la racine quarrée de $28 \pm \sqrt{320} \pm \sqrt{448} + \sqrt{140}$, est $4 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{7}$.

363. Problême III. *Extraire, lorsque la chose est possible, la racine quarrée d'une formule qui ne contient que des parties radicales du second degré, et point de parties rationnelles.*

Soit, par exemple, le binome $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, où il n'entre que des parties radicales, dont il faut extraire la racine

quarrée. On voit aisément que cette racine doit avoir la forme $\sqrt{(p\sqrt{r})} \pm \sqrt{(q\sqrt{r})}$, où les deux quantités p et q sont affectées du même facteur radical $\sqrt{r}$, afin qu'en la quarrant, on ait simplement deux parties radicales correspondantes à $\sqrt{A}$ et à $\sqrt{B}$. Si on lui attribuoit la forme $\sqrt{(p\sqrt{r})} \pm \sqrt{(q\sqrt{s})}$, où les deux facteurs radicaux de p et de q sont différents, on auroit au quarré plus de deux parties radicales. Il n'existe pour la racine point d'autre forme que la première pour produire un quarré semblable à $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$. Je suppose donc que $\sqrt{(p\sqrt{r})} \pm \sqrt{(q\sqrt{r})}$ soit la racine quarrée cherchée ; j'en fais le quarré, et je le compare avec $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$; ce qui me donne les deux équations $(p+q)\sqrt{r} = \sqrt{A}$, ou $(p+q)^2 . r = A$; $\pm 2\sqrt{pqr} = \pm \sqrt{B}$, ou $4pqr = B$. Donc $A - B = (p+q)^2 . r - 4pqr = (p-q)^2 . r$. En comparant les valeurs de A et de $A - B$, on voit que si $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$ est dans le cas d'avoir une racine quarrée, A et $A - B$ sont le même multiple r de deux quarrés qui ont respectivement pour racines la somme et la différence des deux mêmes quantités p et q.

Quant aux valeurs des deux parties $\sqrt{(p\sqrt{r})}$, $\sqrt{(q\sqrt{r})}$ de la racine supposée, on les trouvera par la comparaison des deux équations $(p+q)^2 . r = A$, $(p-q)^2 . r = A - B$; car en tirant d'abord les racines quarrées, ajoutant ensemble les deux équations résultantes, puis retranchant la seconde de la première, on obtiendra

$$p\sqrt{r} = \frac{\sqrt{A} + \sqrt{(A-B)}}{2}, \quad q\sqrt{r} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{(A-B)}}{2}.$$

On connoîtra donc aussi $\sqrt{(p\sqrt{r})}$ et $\sqrt{(q\sqrt{r})}$.

364. Exemple. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de la quantité* $8\sqrt{2} \pm 2\sqrt{30}$.

Nous avons ici $\sqrt{A} = 8\sqrt{2}$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{30}$. Donc $A = 128 = 2 \times 64$, et $A - B = 8 = 2 \times 4$. Ainsi A et $A - B$ sont le même multiple 2 des deux quarrés 64 et 4, dont les racines sont 8 et 2. On a donc $r = 2$, $p = 5$, $q = 3$. Toutes les conditions requises pour que la formule $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$ soit un quarré sont ici remplies ; et la racine de la quantité proposée $8\sqrt{2} \pm 2\sqrt{30}$ est $\sqrt{(5\sqrt{2})} \pm \sqrt{(3\sqrt{2})}$.

365. Problème IV. *Extraire la racine quarrée d'une formule en partie réelle, en partie imaginaire.*

Soit, par exemple, le binome $F \pm \sqrt{-G}$, dans lequel F est une quantité réelle, positive ou négative, ou même zéro, G une quantité réelle positive, afin que $\sqrt{-G}$ soit imaginaire. En mettant dans l'expression de la racine quarrée $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$ de $A \pm \sqrt{B}$, trouvée (356), F pour A, $-G$ pour B, et conservant K pour représenter $\sqrt{(F^2 + G)}$, qui doit être une quantité rationnelle pour que la formule proposée soit un quarré parfait, on trouvera $\sqrt{(F \pm \sqrt{-G})} = \sqrt{\left(\frac{F+K}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{F-K}{2}\right)}$.

366. Exemple I. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de* $\pm \sqrt{-64}$, *ou de* $\pm 8\sqrt{-1}$.

Nous avons ici $F = 0$, $\sqrt{-G} = 8\sqrt{-1}$; donc $G = 64$, $F^2 + G = 64$, dont la racine quarrée est 8. La racine quarrée cherchée est donc $2 \pm 2\sqrt{-1}$.

367. Exemple II. *Extraire, s'il est possible, la racine quarrée de* $16 \pm 30\sqrt{-1}$.

Nous avons ici $F = 16$, $\sqrt{-G} = 30\sqrt{-1}$. Donc $F^2 = 256$, $G = 900$, $F^2 + G = 1156$, dont la racine quarrée est 34. Donc la racine quarrée cherchée est $5 \pm 5\sqrt{-1}$.

368. *Remarque.* En général, que $F \pm \sqrt{-G}$ soit ou non un quarré parfait, on peut toujours représenter sa racine quarrée par une expression de cette forme $a \pm b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles. Car la racine quarrée de $F \pm \sqrt{-G}$ peut s'exprimer généralement par $\pm\left(\sqrt{\left[\frac{F+\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]} \pm \sqrt{\left[\frac{F-\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}\right)$, puisqu'en élevant cette dernière quantité au quarré, on trouve $F \pm \sqrt{-G}$. Or, $\sqrt{(F^2+G)}$ étant toujours une quantité réelle plus grande que F, il est évident que, soit qu'on suppose F positive ou négative, la première partie $\sqrt{\left[\frac{F+\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}$ de la racine proposée est toujours une quantité réelle qu'on peut représenter par a, et que

la seconde partie $\sqrt{\left[\frac{F-\sqrt{(F^2+G)}}{2}\right]}$, qui est imaginaire, et qu'on peut écrire ainsi, $\sqrt{\left[\frac{\sqrt{(F^2+G)}-F}{2}\right]} \times \sqrt{-1}$ peut s'exprimer par $b\sqrt{-1}$, en faisant $\sqrt{\left[\frac{\sqrt{(F^2+G)}-F}{2}\right]}$ $= b$, quantité réelle.

369. *Corollaire I.* Il suit de là que si l'on tire la racine quarrée de $F \pm \sqrt{-G}$; puis la racine quarrée de la racine quarrée précédente, ainsi de suite, on aura toujours pour chaque racine une quantité qu'on pourra représenter par $a \pm b\sqrt{-1}$. Car d'abord nous venons de voir que $\sqrt{[F \pm \sqrt{-G}]}$ se rapporte à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, ou $a \pm \sqrt{-b^2}$. Par la même raison, la racine quarrée de cette racine quarrée est toujours une quantité de pareille espèce; ainsi de suite.

370. *Corollaire II.* Toute racine *paire* d'une quantité négative $-C$, est réductible à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

Car, 1.° $\pm\sqrt{-C} = \pm\sqrt{C}.\sqrt{-1}$, qui se rapporte à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, en faisant $a = 0$, $b = \sqrt{C}$. De même si, dans l'article 365, on fait $F = 0$, $G = C$, on trouvera que $\sqrt{\pm[\sqrt{-C}]} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{C}}{2}\right)} \times (1 \pm \sqrt{-1}) =$ $\sqrt[4]{\left(\frac{C}{4}\right)} \times (1 \pm \sqrt{-1})$, qui se rapporte à $a \pm b\sqrt{-1}$, en faisant $a = b = \sqrt[4]{\frac{C}{4}}$. D'un autre côté on a $\sqrt[4]{-C} =$ $\sqrt{(\sqrt{-C})}$; $\sqrt[8]{-C} = \sqrt{(\sqrt[4]{-C})}$; ainsi de suite. Par conséquent toutes les racines de $-C$, qui ont pour indices l'un des termes de la progression géométrique ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : etc. se réduisent successivement à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

2.° La racine sixième de $-C$ étant la même chose que la racine quarrée de la racine cube de $-C$, et $\sqrt[3]{-C}$ étant $= -\sqrt[3]{C}$, si l'on suppose, pour abréger un peu, $\sqrt[3]{C} = D$, on aura $\sqrt[6]{-C} = \sqrt{-D} = \sqrt{D}.\sqrt{-1}$. Ce

qui rappelle ce cas au précédent, et fait voir qu'on peut comprendre sous la forme $a \pm b\sqrt{-1}$ toutes les racines paires de $-C$, dont les indices sont l'un des termes de la progression géométrique ∺6:12:24:48:etc.

3.° De même $\sqrt[10]{-C}$ étant la même chose que $\sqrt{(\sqrt[5]{-C})}$, et $\sqrt[5]{-C}$ étant $= -\sqrt[5]{C}$; si l'on fait $\sqrt[5]{C} = E$, on aura $\sqrt[10]{-C} = \sqrt{-E}$. D'où l'on voit encore que ce cas se rappelle au premier, et qu'on pourra toujours mettre sous la forme $a \pm b\sqrt{-1}$ toutes les racines paires de $-C$, dont les indices sont l'un des termes de la progression géométrique ∺10:20:40:80:etc.

Ainsi de suite. Il est évident que les progressions indiquées comprennent par leur réunion tous les nombres pairs.

371. Problème V. *Extraire, s'il est possible, la racine cube de la formule* $A \pm \sqrt{B}$, *qui contient une partie rationnelle* A, *et la partie radicale* $\sqrt{B}$ *du second degré.*

J'observe, 1.° que la racine cube cherchée ne peut pas contenir plus d'un radical du second degré; car le cube d'une quantité telle que $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$ contiendroit des radicaux à tous ses termes, et par conséquent le cube supposé $A \pm \sqrt{B}$ contiendroit plus d'un radical du second degré, ce qui est contraire à l'hypothèse;

2.° Que la racine peut contenir avec un radical du second degré, un radical du troisième degré, pourvu que ce dernier radical soit commun à tous ses termes. En effet, le cube d'une quantité telle que $(p \pm \sqrt{q})\sqrt[3]{k}$ est $p^3k \pm 3p^2k\sqrt{q} + 3pqk \pm qk\sqrt{q}$; et ce cube a, comme on voit, de même que $A \pm \sqrt{B}$, une partie rationnelle, savoir, $p^3k + 3pqk$, et une partie radicale du second degré, savoir, $(\pm 3p^2k \pm qk\sqrt{q})q$. La racine cherchée ne peut pas avoir d'autres espèces de formes.

Je suppose que cette racine soit $(p \pm \sqrt{q})\sqrt[3]{k}$; ce qui comprend le cas où la racine doit être simplement $p \pm \sqrt{q}$, en faisant, lorsque le problème l'exige, $k = 1$. Elevons $(p \pm \sqrt{q})\sqrt[3]{k}$ au cube, et égalons la partie rationnelle de

ce cube à A, et la partie radicale à $\pm\sqrt{B}$; nous aurons $A = p^3k + 3pqk$, $\pm\sqrt{B} = \pm(3pk + qk)\sqrt{q}$. D'un autre côté, puisque $A + \sqrt{B}$ a pour racine cube $(p + \sqrt{q})\sqrt[3]{k}$, et que $A - \sqrt{B}$ a pour racine cube $(p - \sqrt{q})\sqrt[3]{k}$, on aura $(A + \sqrt{B}) \times (A - \sqrt{B}) = (p + \sqrt{q})^3 \times (p - \sqrt{q})^3 \times k^2$, ou bien $A^2 - B = (p^2 - q)^3 . k^2$, et $(p^2 - q)^3 = \frac{A^2 - B}{k^2}$. Donc p, q et k étant supposées des quantités rationnelles, il faudra que la quantité rationnelle $\frac{A^2 - B}{k^2}$ soit de plus un cube parfait, puisque sa racine cube est $p^2 - q$. Si donc on trouve par la méthode de l'art. 113 que $A^2 - B$ est un cube parfait, on fera $k = 1$: si $A^2 - B$ n'est pas un cube parfait, on déterminera k de manière que $\frac{A^2 - B}{k^2}$ soit un cube parfait, ce qui est toujours possible, puisque le pis aller est de supposer $k = \pm \frac{1}{A^2 - B}$. Nommons pour abréger n la quantité $\sqrt[3]{\left(\frac{A^2 - B}{k^2}\right)}$, que je suppose rationnelle : on aura $q = p^2 - n$. Substituant cette valeur de q dans l'équation $A = p^3k + 3pqk$, on aura $A = p^3k + 3p^3k - 3nkp$, ou bien

$$(M) \quad 4p^3k - 3pnk - A = 0 :$$

équation qui donnera pour p une valeur rationnelle, lorsque le problème proposé est possible, valeur qui se trouvera, ou par l'habitude du calcul, ou par les méthodes expliquées (Chap. XIX). Quand on aura p, on aura q par l'équation $q = p^2 - n$.

372. Exemple I. *Extraire, s'il est possible, la racine cube de la quantité* $2 \pm \sqrt{5}$.

Nous avons ici $A = 2$, $\pm\sqrt{B} = \pm\sqrt{5}$, $A^2 - B = 4 - 5 = -1$, dont la racine cube est $-1 = n$; conséquent l'équation (M) devient $4p^3 + 3p$ elle est divisible par $2p - 1$; donc $p = \frac{1}{2}$ $n = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$. Ainsi la racine

posée est de la forme $p \pm \sqrt{q}$, et cette racine est $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

373. Exemple II. *Extraire, s'il est possible, la racine cube de la quantité* $5 \pm 3\sqrt{3}$.

Nous avons ici $A = 5$, $\pm\sqrt{B} = \pm 3\sqrt{3}$, $A^2 - B = -2$, qui n'est pas un cube parfait. La racine cube n'est donc pas de la forme $p \pm \sqrt{q}$. Je fais $k = -\frac{1}{A^2 - B} = \frac{1}{2}$; ce qui donne $\sqrt[3]{\left(\frac{A^2 - B}{k^2}\right)} = \sqrt[3]{-8} = -2 = n$. Par conséquent l'équation (M) devient $2p^3 + 3p - 5 = 0$; et elle est divisible par $p - 1 = 0$. Donc $p = 1$, $q = 3$, et la racine demandée, qui est de la forme $(p \pm \sqrt{q})\sqrt[3]{k}$), est $(1 \pm \sqrt{3}) \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, ou $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

374. Exemple II. *Reconnoître si l'équation* $x^3 - 6x + 4 = 0$, *qui semble* (286) *appartenir au cas irréductible, n'auroit pas des racines exprimables sous une forme finie.*

En résolvant cette équation par la méthode de l'article 283, on trouve $x = \sqrt[3]{(-2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(-2 - 2\sqrt{-1})}$. Il s'agit donc de tirer, s'il est possible, la racine cube de la quantité $-2 \pm 2\sqrt{-1}$. Or on a ici $A = -2$; $\pm\sqrt{B} = \pm 2\sqrt{-1}$; $A^2 - B = 4 + 4 = 8$, dont la racine cube est $2 = n$; $k = 1$. Ainsi l'équation (M) devient $4p^3 - 6p + 2 = 0$, et elle est divisible par $p - 1 = 0$; donc $p = 1$, $q = -1$; donc $\sqrt[3]{(-2 + 2\sqrt{-1})} = 1 - \sqrt{+1}$; et $\sqrt[3]{(-2 - 2\sqrt{-1})} = 1 - \sqrt{-1}$. Par conséquent $x = 2$; les quantités imaginaires que x renfermoit dans son expression sous sa première forme se détruisant mutuellement par l'opposition des signes dans l'expression sous la seconde forme.

Si l'on divise l'équation proposée $x^3 - 6x + 4 = 0$ par $x - 2$, on trouvera l'équation du second degré $x^2 + 2x - 2 = 0$, laquelle donne pour x les deux autres valeurs réelles, $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Cet exemple peut servir d'éclaircissement à la restriction qui accompagne l'article 286.

375. Exemple IV. *Extraire, s'il est possible, la racine cube de la quantité littérale* $4a^3 - 3ab^2 \pm (4a^2 - b^2)\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Nous avons ici $A = 4a^3 - 3ab^2$; $\pm\sqrt{B} = \pm(4a^2 - b^2)\sqrt{(a^2 - b^2)}$; $A^2 - B = b^6$, dont la racine cube est $b^2 = n$; $= 1$. Ainsi l'équation (M) devient $4p^3 - 3b^2p - 4a^3 + 3ab^2 = 0$; et cette équation est divisible par $p - a = 0$. Donc $p = a$, $q = aa - bb$. Donc la racine cube cherchée est $a \pm \sqrt{(aa - bb)}$.

376. *Remarque I.* Si on proposoit d'extraire la racine cube d'une quantité composée de deux parties radicales du second degré, telle qu'est $\sqrt{C} \pm \sqrt{D}$, on multiplieroit et on diviseroit tout par le cube de l'une des parties, par exemple, par celui de $\sqrt{C}$; ce qui donneroit $\sqrt{C} + \sqrt{D} = \frac{C^2 \pm \sqrt{C^3 D}}{\sqrt{C^3}}$. Or, dans cette fraction, le numérateur se rapporte à la forme $A \pm \sqrt{B}$, en faisant $C^2 = A$, $\sqrt{C^3 D} = \sqrt{B}$; et ce même numérateur sera un cube, si $\sqrt{C} \pm \sqrt{D}$ en est un, puisque $C^2 \pm \sqrt{C^3 D}$ est le produit de $\sqrt{C} \pm \sqrt{D}$, par une quantité élevée au cube. Ainsi on aura la racine cube de $\sqrt{C} \pm \sqrt{D}$, en tirant, s'il est possible, celle de $C^2 \pm \sqrt{C^3 D}$, et en la divisant par la de racine cube $\sqrt{C^3}$, c'est-à-dire, par $\sqrt{C}$.

377. *Remarque II.* Qu'on ait la quantité $F \pm \sqrt{-G}$, en partie réelle, en partie imaginaire. Lorsque cette quantité est un cube parfait, on trouve, par la méthode de l'article 371, que sa racine cube est toujours de cette forme, $a \pm b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles. Maintenant je dis en général que, lors même que $F \pm \sqrt{-G}$ n'est pas un cube, on peut néanmoins indiquer sa racine cube par la formule $a \pm b\sqrt{-1}$. En effet, représentons la racine cube dont il s'agit par $r + s$, la partie s contenant un radical du second degré, tandis que r n'en contient point, et les deux parties r et s pouvant contenir d'ailleurs chacune un même radical du troisième degré. Ces formes sont les seules qui soient compatibles avec l'espèce de la quantité $F \pm \sqrt{-G}$. En faisant le cube de $r + s$, et en égalant à F la partie de ce cube qui contient

la lettre r et le quarré de s, et à $\sqrt{-G}$ la partie où s est élevée à une puissance impaire, on aura ces deux équations $F = r^3 + 3rs^2$, $\sqrt{-G} = (3r^2 + s^2)s$, ou $G = -(3r^2 + s^2)^2 s^2$, qui, étant combinées ensemble, donneront nécessairement pour r et s des valeurs telles qu'en élevant $r+s$ au cube, on aura $F \pm \sqrt{-G}$, puisqu'elles sont fondées sur l'hypothèse que $r+s$ est la racine cube de $F \pm \sqrt{-G}$. Or, en opérant sur ces deux équations comme dans l'art. 371, on trouvera d'abord $r^2 - s^2 = \sqrt[3]{[F^2 + G]}$, quantité réelle que je nomme n, pour abréger. Ensuite on aura en r une équation analogue à l'équation (M), savoir, $4r^3 - 3nr - F = 0$, ou bien $r^3 - \frac{3nr}{4} - \frac{F}{4} = 0$. Dans cette dernière équation, qui est du troisième degré, les trois valeurs de r sont réelles (286). Ainsi, 1.° l'on peut représenter l'une d'elles par a. 2.° L'équation $G = -(3r^2 + s^2)^2 s^2$ donne $s^2 = \frac{-G}{(3r^2 + s^2)^2}$. Mettant dans le dénominateur, à la place de s^2 sa valeur $r^2 - n$, on aura $s^2 = \frac{-G}{(4r^2 - n)^2}$: quantité qui est nécessairement négative, puisque G est positive, et que le quarré $(4r^2 - n)^2$ est aussi une quantité positive. Donc s est une quantité imaginaire qui a pour expression $\frac{\sqrt{G}}{4r^2 - n} \times \sqrt{-1}$, et qui se rapporte à la forme $b\sqrt{-1}$, en faisant $b = \frac{\sqrt{G}}{4r^2 - n}$, quantité réelle.

378. *Corollaire.* Il suit de là que si l'on tire de la quantité $F \pm \sqrt{-G}$ une racine *paire*, dont l'indice soit compris dans la progression géométrique ∺ 6 : 12 : 24 : 48 : etc., cette racine sera toujours réductible à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$. Car, tirant d'abord la racine cube de $F \pm \sqrt{-G}$, on aura une quantité de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$. Tirant ensuite la racine quarrée de cette quantité, puis la racine quarrée de la racine quarrée précédente, ainsi de suite, on aura continuellement des expressions de la même forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

379. *Scholie I.* Si on demandoit la racine quatrième de

$A \pm \sqrt{B}$, on tireroit d'abord la racine quarrée, puis la racine quarrée de cette racine. Si, la racine sixième, on tireroit la racine quarrée, puis la racine cube de cette racine. Si, la racine huitième, on tireroit la racine quarrée, puis la racine quatrième de cette racine; ainsi de suite pour toutes les racines dont l'indice est pair. Il est clair que si les extractions particulières que demande chaque problème particulier sont impossibles séparément, ce problème lui-même sera impossible.

380. *Scholie II.* Supposons qu'on demande la racine n de $A \pm \sqrt{B}$, n étant un nombre impair. En raisonnant généralement comme on a fait (374), on verra que la racine cherchée doit être de la forme $p \pm \sqrt{q}$, ou de la forme $(p \pm \sqrt{q}) . \sqrt[n]{k}$. Supposons le second cas, lequel comprend le premier, en faisant $k = 1$. Nous aurons donc $(p \pm \sqrt{q})^n \times k = A \pm \sqrt{B}$, ou bien (en développant la puissance n du binome $p \pm \sqrt{q}$ par la formule de l'art. 145),

$$p^n k \pm n . p^{n-1} k \sqrt{q} + \frac{n.(n-1)p^{n-2}kq}{1.2} \pm \frac{n.(n-1)(n-2)p^{n-3}kq\sqrt{q}}{1.2.3} + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)p^{n-4}kq^2}{1.2.3.4} \pm \ldots \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)p^{n-5}kq^2\sqrt{q}}{1.2.3.4.5} + \text{etc.} = A \pm \sqrt{B};$$

d'où l'on tire (en égalant ensemble les parties rationnelles),

$$A = p^n k + \frac{n.(n-1)p^{n-2}kq}{1.2} + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)p^{n-4}kq^2}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

D'un autre côté, l'équation $(p \pm \sqrt{q})^n \times k = A \pm \sqrt{B}$ comprend ces deux-ci . . . . $(p + \sqrt{q})^n \times k = A + \sqrt{B}$, $(p - \sqrt{q})^n \times k = A - \sqrt{B}$, qui, étant multipliées ensemble, donnent

$$(p^2 - q)^n \times k^2 = A^2 - B, \text{ et } (p^2 - q)^n = \frac{A^2 - B}{k^2}.$$

Ainsi il faudra que $\sqrt[n]{\left(\frac{A^2 - B}{k^2}\right)}$ soit une quantité rationnelle qui est censée connue, et que je nomme h; ce qui donne $q = p^2 - h$. Substituant cette valeur de q dans l'expression trouvée ci-dessus pour A, on aura une équation

du degré n, qui ne contiendra d'autre inconnue que p, et dont on fera un usage analogue à celui qu'on a fait (374) de l'équation (M). Connoissant p, on connoîtra q par l'équation $q = p^2 - h$.

381 *Scholie III.* La racine cinquième, la racine septième, etc. de la quantité $F \pm \sqrt{-G}$, en partie réelle, en partie imaginaire, est toujours réductible à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$. Car, en représentant cette racine par $r \pm s$, où s seulement contient un radical du second degré, tandis que r et s peuvent contenir l'une et l'autre un radical du cinquième et du septième degré, etc.; puis, opérant précisément comme dans l'article 377, on trouvera en r une équation du cinquième ou du septième degré, laquelle donnera toujours pour r une valeur réelle, parce que toute équation d'un degré impair a au moins une valeur réelle, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Cette valeur de r peut être représentée par a. Ensuite on trouvera que s^2 est une quantité négative, et que par conséquent s est une quantité imaginaire qui peut s'exprimer par $b\sqrt{-1}$.

De là et de l'article 369 il suit qu'on aura toujours des quantités de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, en tirant de $F \pm \sqrt{-G}$ une racine dont l'indice est compris dans les progressions géométriques suivantes, $\div 5:10:20:40:80:$etc.; $\div 7:14:28:56:112:$etc.; $\div 9:18:36:72:144:$etc. etc.

Corollaire général.

382. Revenons et terminons ce chapitre par une remarque importante sur la forme générale des racines imaginaires.

Nous avons démontré, 1.° que toute racine paire d'une ntité négative quelconque peut être représentée par $\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles;

Que la racine quelconque d'une expression en partie en partie imaginaire en vertu d'un radical pair devant d'une quantité négative, est également la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

Ainsi, en supposant que les quantités imaginaires qui proviennent de la résolution d'une équation sont des racines paires de quantités négatives, ou des racines quelconques de quantités en partie réelles, en partie imaginaires à cause d'un radical pair placé au devant d'une quantité négative, les expressions des quantités dont il s'agit, sont toujours réductibles à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

Soit, par exemple, l'équation $x^8 - 2gx^4 + 3gg = 0$. On trouvera d'abord $x^4 - g = \pm\sqrt{-2gg} = \pm g\sqrt{-2}$. Ensuite on aura $x = \pm\sqrt[4]{[g \pm g\sqrt{-2}]}$, expressions qu'on réduira à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, par la méthode de l'article 370.

Soit l'équation $x^6 - 2gx^3 + 3g^2 = 0$. On trouvera d'abord $x^3 - g = \pm g\sqrt{-2}$, ensuite $x = \sqrt[3]{[g \pm g\sqrt{-2}]}$, valeurs qu'on réduira à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, par la méthode de l'article 377.

Il est clair que l'expression $a \pm b\sqrt{-1}$ peut toujours être regardée comme provenant d'une équation du second degré. Car, soit l'inconnue $y = a \pm b\sqrt{-1}$; nous aurons $y - a = \pm b\sqrt{-1}$. Donc, en quarrant chaque membre, et mettant tout d'un même côté, on aura $yy - 2ay + aa + bb = 0$.

D'Alembert est le premier qui ait démontré (Mém. de l'acad. de Berlin, an 1746) que toute quantité imaginaire peut s'exprimer par $a \pm b\sqrt{-1}$. Sa démonstration, fondée sur le calcul intégral, s'étend aux imaginaires exponentielles. Mais on n'avoit pas encore observé que pour les équations algébriques les deux théorèmes précédents pouvoient se démontrer par des principes tirés de la chose même.

Il seroit facile d'étendre les méthodes expliquées dans ce chapitre à l'extraction des racines des quantités de la forme $A + \sqrt[n]{B}$, l'indice n du radical étant un nombre quelconque; mais ces détails, peu utiles d'ailleurs, nous meneroient trop loin.

compris dans l'article précédent. Pour démontrer le second, on observera que le nombre des termes d'une équation d'un degré impair étant pair (317), si l'on change les signes de ces termes pris de deux en deux à compter depuis le second inclusivement jusqu'au dernier, les racines positives deviendront négatives, et les négatives positives (322). Or, par ce changement de signes, le dernier terme de l'équation devient négatif. Donc la nouvelle équation a, au moins, une racine positive, et par conséquent l'équation primitive a, au moins, une racine négative correspondante.

388. *Corollaire IV.* Une équation d'un degré pair, dont le dernier terme est négatif a, au moins, deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative; car d'abord elle a une racine réelle positive (386). Ensuite, si l'on change les signes de ses termes pris de deux en deux à compter depuis le second jusqu'au dernier, pour changer les racines positives en négatives, et les négatives en positives, on aura une équation dont le dernier terme demeurera le même en tout que celui de la proposée. Donc cette nouvelle équation aura, au moins, une racine réelle positive, et par conséquent la racine correspondante de l'équation proposée sera réelle et négative.

389. *Remarque.* Il peut se faire qu'une équation ne donne jamais de résultats de signes contraires, quelques nombres qu'on substitue à la place de l'inconnue. Cela arrive 1.° lorsque l'équation contient seulement des racines égales deux à deux, quatre à quatre, etc. Ainsi, par exemple, l'équation $(x-a)^2 \times (x-b)^4 = 0$, donnera évidemment toujours un résultat de même signe, quelques valeurs qu'on attribue à x.

2.° Lorsque l'équation contient seulement des racines imaginaires. Telle est l'équation $(x + a + b\sqrt{-1})$. $(x + a - b\sqrt{-1})$. $(x - c + d\sqrt{-1})$. $(x - c - d\sqrt{-1}) \ldots = 0$, qui aura toujours le même signe, quelque valeur qu'on donne à x. Sur quoi il faut se rappeler que les imaginaires vont toujours deux à deux,

et que les deux racines qui composent une même paire, ne diffèrent jamais que par le signe de la partie imaginaire.

3.° Lorsque l'équation contient tout-à-la-fois des racines égales deux à deux, quatre à quatre, etc. et des racines imaginaires. Telle est l'équation $(x-a)^2 \cdot (x-b)^4 \cdot (x+c+d\sqrt{-1}) \cdot (x+c-d\sqrt{-1}) = 0$.

Concluons de là que toute équation qui donne des résultats de signes contraires, en mettant à la place de l'inconnue des nombres réels différents, ne tombe dans aucun des trois cas précédents.

390. Probléme I. *Résoudre une équation quelconque, sinon rigoureusement, au moins par approximation.*

Je commence par examiner si cette équation ne contient pas des racines égales; ces racines, lorsqu'il y en a, se trouvent directement par l'article 350; et on parvient à une équation d'un degré inférieur qui ne contient plus de racines égales. J'examine encore si l'équation réduite n'a pas de diviseurs commensurables d'une dimension; ces diviseurs se trouvent par les méthodes du chap. XIX. Au moyen de ces recherches préliminaires, on n'aura plus à résoudre que des équations qui contiennent des racines réelles inégales et incommensurables, ou des racines imaginaires, ou des racines en partie réelles inégales et incommensurables, en partie imaginaires. Je suppose donc que les équations qu'il faut ici résoudre par approximation sont de cette nature; on verra, par les exemples suivants, comment il faut opérer en général. Ces différents exemples ont chacun leur difficulté particulière et se rapportent à différentes sortes d'équations.

391. Exemple I. *Résoudre, par une première approximation, l'équation* $x^3 + 5x + 7 = 0$.

Comme cette équation est d'un degré impair et que son dernier terme est positif, je suis assuré (387) qu'elle a, au moins, une racine réelle négative; et par conséquent je ne puis pas manquer d'obtenir des résultats de signes contraires, en substituant pour x deux nombres négatifs

différents. Je fais donc d'abord $x = 0$, ou $x = -0$; ce qui donne le résultat positif $+7$; je fais $x = -1$, ce qui donne encore un résultat positif $+1$; je fais $x = -2$, ce qui donne le résultat négatif -11. D'où je conclus que l'une des racines de l'équation est comprise entre -1 et -2. Les deux autres racines sont imaginaires (284); mais si elles étoient réelles, on détermineroit semblablement leurs limites.

Nous apprendrons bientôt à trouver des limites plus étroites pour la racine réelle.

392. Exemple II. *Résoudre, par une première approximation, l'équation* $x^4 - 16x^2 + 7x + 37 = 0$.

Supposons successivement $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, etc.; puis $x=-0$, $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$, etc.; nous aurons la table qu'on voit ici :

Suppositions.	*Résultats.*	*Suppositions.*	*Résultats.*
$x = 0$	$+37$	$x = -0$	$+37$
$x = 1$	$+29$	$x = -1$	$+15$
$x = 2$	$+3$	$x = -2$	-25
$x = 3$	-5	$x = -3$	-47
$x = 4$	$+65$	$x = -4$	$+9$
$x = 5$	$+297$		

D'où nous devons conclure que l'une des valeurs de x est comprise entre 2 et 3, une seconde entre 3 et 4, une troisième entre -1 et -2, enfin la quatrième entre -3 et -4.

393. Exemple III. *Résoudre, par une première approximation, l'équation* $x^4 - 15x^2 + 7x + 37 = 0$.

En faisant successivement $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$, etc., on trouvera toujours des résultats positifs; mais on ne doit pas se hâter d'en conclure que l'équation n'a pas de racines positives; car il peut se faire que les valeurs supposées pour x marchent par de trop

grands sauts. Le plus court moyen de s'en assurer est de changer (327) l'équation en une autre dont les racines soient plus grandes, par exemple, dix fois plus grandes, et d'examiner si, en augmentant successivement d'une unité la nouvelle inconnue, on ne parviendra pas à des résultats de signes contraires. Je fais donc $x = \frac{y}{10}$; ce qui change l'équation proposée en celle-ci, $y^4 - 1500y^2 + 7000y + 370000 = 0$. Ensuite je suppose successivement $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, ... $y = 10$, $y = 11$, $y = 12$, ... $y = 20$, $y = 21$, $y = 22$, etc.; et je trouve que les deux suppositions $y = 24$, $y = 25$, donnent des résultats de signes contraires. Ainsi l'une des valeurs de y est entre 24 et 25; et par conséquent la valeur correspondante de x est entre 2,4 et 2,5. Même procédé, s'il est nécessaire, pour les autres racines de l'équation proposée.

On voit, par cet exemple, que plus les racines d'une équation approchent d'être égales, plus la valeur de y, dans la transformée, doit être grande par rapport à x.

394. Exemple IV. *Trouver dans l'équation* $x^2 + 3x + 7 = 0$, *dont les racines sont imaginaires, les expressions approchées de ces racines.*

Je feins que l'équation proposée provient de celle-ci; $(x + p + q\sqrt{-1}) \times (x + p - q\sqrt{-1}) = 0$, ou $x^2 + 2px + pp + qq = 0$, p et q étant des quantités réelles qu'il faut déterminer, du moins à-peu-près. Or l'équation proposée et l'équation feinte, devant être identiques, on aura $2p = 3$, $pp + qq = 7$. Nous connoissons d'abord p, puisque sa valeur est $\frac{3}{2}$, ou 1,5: substituons cette valeur dans l'équation $pp + qq = 7$; nous aurons $qq = 7 - \frac{9}{4} = \frac{19}{4}$, ou $q^2 - \frac{19}{4} = 0$. Cette équation a (388) deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative; et, en faisant successivement $q = 0$, $q = 1$, $q = 2$, $q = 3$, etc., puis $q = -1$, $q = -2$, etc., on trouve que la racine positive est entre 2 et 3, et la négative entre -2 et -3.

Cet exemple est fort simple; mais on opérera de même

dans les cas analogues plus composés. Quel que soit le degré d'une équation qui contient des racines imaginaires, ces racines vont toujours deux à deux, et peuvent être regardées comme produites par des équations du second degré : elles sont donc toujours réductibles à la forme qu'on a attribuée aux racines de l'équation précédente. Ainsi, en feignant qu'une équation dont les racines sont imaginaires est le produit de plusieurs paires de racines imaginaires semblables à celles de l'exemple précédent, et comparant terme à terme l'équation proposée avec l'équation feinte, on aura plusieurs équations qui serviront à éliminer tous les coëfficients inconnus des racines feintes, à l'exception d'un seul qui se trouvera dans une équation finale, laquelle aura au moins une racine réelle. On prendra cette racine pour la valeur du coëfficient dont on vient de parler; ensuite, en remontant aux autres équations des coëfficients, on parviendra à les déterminer tous, à-peu-près. Il est clair que leurs valeurs seront des quantités réelles, et que les racines de l'équation ne sont imaginaires que parce que les coëfficients des équations feintes sont en partie multipliés par $\sqrt{-1}$.

395. *Scholie.* La transformation employée dans l'exemple III a non-seulement l'avantage de lever facilement la difficulté qui se rencontre dans les questions de cette nature, mais elle sert encore à trouver d'une manière plus approchée les racines d'une équation, et, en la répétant plusieurs fois, on poussera l'approximation aussi loin qu'on voudra. Pour rendre ceci clair, reprenons l'équation $x^3 + 5x + 7 = 0$ (Exemple I). Je la change en une autre dont les racines soient dix fois plus grandes, en faisant $x = \frac{y}{10}$; ce qui me donne $y^3 + 500y + 7000 = 0$: je détermine deux nombres qui ne diffèrent que de 1, et entre lesquels soit comprise la valeur de y; et comme j'ai déja trouvé que la valeur de x est entre -1 et -2, je vois tout de suite que celle de y est entre -10 et -20.

Resserrons cet intervalle. La supposition $y = -10$, donne pour l'équation en y un résultat positif, et la supposition $y = -20$ donne un résultat négatif. Faisons $y = -15$, nous aurons un résultat négatif; donc la valeur de y est entre -10 et -15. Soit $y = -12$, on aura encore un résultat négatif; donc la valeur de y est entre -10 et -12. Soit $y = -11$, on aura un résultat positif; donc la valeur de y est entre -11 et -12, et celle de x est entre $-1,1$ et $-1,2$.

Pour pousser l'approximation plus loin, je change l'équation en y en une autre dont les racines soient dix fois plus grandes que les valeurs de y, ou cent fois plus grandes que celles de x. Je fais donc $y = \frac{z}{10}$; et l'équation en y se change en celle-ci, $z^3 + 50000z + 7000000 = 0$. Et comme la valeur de y est entre -11 et -12, celle de z sera entre -110 et -120. La supposition $z = -110$ donne, pour l'équation en z, un résultat positif, et la supposition $z = -120$ donne un résultat négatif. Faisons $z = -115$, nous aurons un résultat négatif; donc la valeur de z est entre -110 et -115. Soit $z = -112$, nous aurons un résultat négatif; donc la valeur de z est entre -110 et -112. Soit $z = -111$, le résultat est positif; donc la valeur de z est entre -111 et -112, celle de y entre $-11,1$ et $-11,2$, et celle de x entre $-1,11$ et $-1,12$. On connoît donc x à moins de $\frac{1}{100}$ près; et en continuant à opérer toujours de la même manière, on pourra trouver une valeur qui diffère d'aussi peu qu'on voudra de celle de x.

Je ferai observer en passant que la transformation d'une équation en une autre dont les racines soient 10 fois, 100 fois, 1000 fois, etc., plus grandes, sert à changer une équation qui contient des parties décimales en une autre qui n'en contient pas. Par exemple, soit l'équation $x^3 + 5,745x^2 + 6,7847x + 9,7428 = 0$; le coëfficient du second terme contenant trois figures décimales, je change l'équation en une autre dont les racines soient 1000 fois plus grandes; je fais donc $x = \frac{y}{1000}$; ce qui me donne $y^3 + 5745y^2$

$+ 6784700 + 9742800000 = 0$, équation où il n'y a point de parties décimales.

396. Problème II. *Pousser plus loin, et d'une manière commode, une première approximation donnée par la méthode précédente.*

Quand on a trouvé, à moins de $\frac{1}{10}$ près, l'une des racines d'une équation, la méthode suivante, due à Newton, donne par un calcul très-expéditif la valeur de cette racine, approchée aussi près qu'on voudra. Par exemple, soit encore notre équation $x^3 + 5x + 7 = 0$, dans laquelle la valeur de x est, à moins de $\frac{1}{10}$ près, $-1,1$, ainsi que nous l'avons trouvé.

Qu'on prenne $x = -1,1 + z$, z étant ce qu'il faudroit joindre à $-1,1$, pour avoir exactement x. Qu'au moyen de cette valeur, on élimine x de l'équation proposée $x^3 + 5x + 7 = 0$; on aura la transformée $z^3 - 3,3z^2 + 8,63z + 0,169 = 0$. Or, comme la quantité z est au-dessous de $\frac{1}{10}$, et que par conséquent son quarré est au-dessous de $\frac{1}{100}$, son cube au-dessous de $\frac{1}{1000}$; il est clair que les deux termes qui contiennent z^3 et z^2, sont beaucoup plus petits que les autres, et qu'ils peuvent être négligés. Nous aurons en conséquence $8,63z + 0,169 = 0$; ce qui donne $z = -\frac{0,169}{8,63} = -\frac{169}{8630} = -0,019$, à-peu-près. Donc $x = -1,1 + z = -1,119$ à peu près.

L'approximation peut être poussée beaucoup plus loin par divers moyens qui dépendent tous de la même méthode. D'abord nous pouvons écrire l'équation générale en z sous cette forme, $z = \frac{-0,169}{z^2 - 3,3z + 8,63}$. Substituant dans le dénominateur, à la place de z, sa première valeur approchée $-0,019$, et à la place de z^2 sa valeur pareillement approchée $0,000361$, on aura $z = \frac{-0,169}{8,693061} = -0,0194$, à peu près. Donc $x = -1,1194$, à peu de chose près.

La même équation générale en z peut être résolue sans négliger d'autre terme que z^3. Par là on a l'équation du

second degré, $-3{,}3z^2+8{,}63z+0{,}169=0$, laquelle donne $z=-0{,}0195$, à peu près. Donc $x=-1{,}1195$, à peu près.

Enfin, de la même manière qu'on s'est servi de la première valeur $-1{,}1$ approchée de x, pour trouver la seconde valeur $-1{,}119$ qui est plus exacte, nous pouvons nous servir de celle-ci pour en trouver une troisième encore plus exacte. Supposons donc $x=-1{,}119+u$, et mettons cette valeur dans l'équation proposée $x^3+5x+7=0$. Et, comme les termes qui contiendront u^3 et u^2 peuvent être rejetés sans scrupule, dispensons-nous d'écrire ces termes pour nous épargner des calculs inutiles La transformée en u sera donc simplement, $8{,}756483u+0{,}00383842=0$; d'où l'on tire à peu près $u=-0{,}00044$. Donc $x=-1{,}11944$, à peu près.

Il est clair que, par le moyen de cette troisième valeur approchée de x, on peut en trouver une quatrième encore plus approchée; ainsi de suite.

CHAPITRE XXIII.

Résolution approchée des équations littérales; retour des suites.

397. Les méthodes d'approximation pour les équations numériques s'appliquent également aux équations littérales homogènes qui contiennent simplement deux lettres, c'est-à-dire, l'inconnue et une autre lettre connue. Par exemple, si on propose l'équation $x^4-5a^2x^2+7a^3x+11a^4=0$, qui ne contient que l'inconnue x et la quantité connue a, on supposera $a=1$, et par là on aura l'équation numérique $x^4-5x^2+7x+11=0$. Quand on aura trouvé les racines de cette équation, on les multipliera par a, et on aura celles de la proposée. Il n'est donc pas question ici de ces sortes d'équations.

On doit observer que, si une équation où il ne paroît que deux lettres n'étoit pas homogène, elle seroit censée

contenir trois lettres, parce que les termes où les dimensions sont les moindres, doivent être censés multipliés par les puissances d'une lettre que l'on a regardée comme l'unité, et qui est sous-entendue. De même une équation où il ne paroît que trois lettres, et qui n'est pas homogène, doit être censée contenir quatre lettres; ainsi de suite.

398. Problème I. *Trouver, au moyen d'une suite infinie convergente, la valeur approchée de l'une des racines d'une équation qui contient plus de deux lettres.*

Soit, par exemple, l'équation homogène et à trois lettres $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$. Les deux quantités données a et b doivent être regardées comme inégales; car si on avoit $a = b$, l'une ou l'autre de ces lettres pourroit être chassée de l'équation, qui ne contiendroit plus alors que deux lettres.

1.er CAS : $a > b$.

Je feins qu'on ait $x = A + Bb + Cb^2 + Db^3 +$ etc.; A, B, C, D, etc. étant des coëfficients inconnus qu'il s'agit de déterminer. Au moyen de cette valeur de x, l'équation proposée $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$ donne, en ordonnant le second membre par rapport à b,

$$\begin{array}{rllll}
x^3 = & + A^3 & + 3A^2B \,.\, b & + 3AB^2 \,.\, b^2 & + B^3 \,.\, b^3 + \text{etc.} \\
 & & & + 3A^2C \,.\, b^2 & + 3A^2D \,.\, b^3 + \text{etc.} \\
 & & & & + 6ABC \,.\, b^3 + \text{etc.} \\
+ a^2x = & + a^2A & + a^2B \,.\, b & + a^2C \,.\, b^2 & + a^2D \,.\, b^3 + \text{etc.} \\
+ abx = & & + aA \,.\, b & + aB \,.\, b^2 & + aC \,.\, b^3 + \text{etc.} \\
-2a^3 = & -2a^3 & & & \\
-b^3 = & \ldots\ldots & & & -1\, b^3.
\end{array}$$

Et, comme on a $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$, il s'ensuit que la somme de toutes les suites qui composent le second membre de l'expression précédente doit aussi être égale à zéro. Donc chaque terme particulier de cette somme doit être zéro. En effet, la valeur de b peut être aussi petite qu'on voudra; et, si on la suppose infiniment petite, on verra, en comparant entre eux les termes du second

membre, que le premier doit être regardé comme infini par rapport au second, le second comme infini par rapport au troisième, le troisième comme infini par rapport au quatrième; ainsi de suite. D'où il résulte qu'aucun terme ne peut être détruit, ni par ceux qui le précèdent, ni par ceux qui le suivent, et que par conséquent la totalité des termes ne seroit pas zéro, si chacun d'eux en particulier n'étoit pas zéro. On aura donc, pour déterminer A, B, C, D, etc., les équations particulières, $A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$; $(3A^2.B + a^2B + aA)b = 0$; $(3AB^2 + 3A^2C + a^2C + aB)b^2 = 0$; $(B^3 + 3A^2.D + 6ABC + a^2D + aC - 1)b^3 = 0$, etc. La première donne $A = a$; la seconde donne (en divisant tout par b, et mettant pour A sa valeur), $3aB + aB + a = 0$, et par conséquent $B = -\frac{1}{4}$. La troisième donne (en chassant b^2, A, B), $\frac{3}{16}a + 4a^2C - \frac{a}{4} = 0$, et par conséquent $C = \frac{1}{64a}$. La quatrième donne semblablement $D = \frac{131}{512a^2}$, etc. Substituons ces valeurs de A, B, C, D, etc., dans la suite feinte; et nous aurons

$$x = a - \frac{b}{4} + \frac{b^2}{64a} + \frac{131b^3}{512a^2} + \text{etc.},$$

qui est la suite cherchée dans le premier cas.

On voit que cette suite est convergente.

Il est à propos de remarquer qu'on a déterminé le premier coëfficient A par la résolution de l'équation $A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$; résolution qui a été facile, parce que cette équation est décomposable en diviseurs rationnels. Mais si, en pareil cas, l'équation n'étoit pas décomposable en diviseurs rationnels, on détermineroit au moins A par approximation (397), puisque l'équation est homogène et ne contient que deux lettres.

IIe CAS : $a < b$.

Je feins qu'on ait $x = A + Ba + Ca^2 + Da^3 +$ etc. Donc, en ordonnant le second membre par rapport à a, on aura,

$$\begin{array}{lllll}
x^3 = & + A^3 & + 3A^2B \,.\, a & + 3AB^2 \,.\, a^2 & + B^3 \,.\, a^3 + \text{etc.} \\
 & & & + 3A^2C \,.\, a^2 & + 3A^2D \,.\, a^3 + \text{etc.} \\
 & & & & + 6ABC \,.\, a^3 + \text{etc.} \\
+ a^2x = & & & + A \,.\, a^2 & + B \,.\, a^3 + \text{etc.} \\
+ abx = & & + Ab \,.\, a & + Bb \,.\, a^2 & + Cb \,.\, a^3 + \text{etc.} \\
- 2a^3 = & & & & - 2 \,.\, a^3 \\
- b^3 = & - b^3. & & &
\end{array}$$

Donc, à cause de $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$, le second membre de l'expression précédente sera aussi zéro. De plus, chacun des termes en particulier de cette expression sera zéro. Ainsi on aura les équations, $A^3 - b^3 = 0$; $(3A^2B + Ab)\,a = 0$; $(3AB^2 + 3A^2C + A + Bb)\,a^2 = 0$; $(B^3 + 3A^2D + 6ABC + B + Cb - 2)\,a^3 = 0$; etc., lesquelles donnent $A = b$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{1}{3b}$, $D = \frac{55}{81b^2}$, etc. Donc, en mettant pour A, B, C, D, etc., leurs valeurs, la suite feinte deviendra,

$$x = b - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{3b} + \frac{55a^3}{81b^2} - \text{etc.}$$

399. *Corollaire.* La valeur trouvée pour x étant l'une des trois racines de l'équation proposée $x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0$; si l'on nomme M cette racine, et qu'on divise l'équation par $x - M = 0$, on obtiendra une équation d'un degré plus bas, dont on connoîtra, à peu de chose près, les coëfficients et le dernier terme, et dont on déterminera les racines par un procédé semblable au précédent, supposé que ces racines soient réelles. Il en sera de même pour les équations des degrés plus élevés.

400. *Scholie I.* Les équations qui contiennent plus de trois lettres peuvent se traiter à peu près de la même manière. Toute la difficulté qu'on éprouve à former les suites qui doivent exprimer les valeurs de l'inconnue, consiste à choisir parmi les termes de l'équation ceux qui sont

plus grands que les autres, et qui déterminent en conséquence la loi suivant laquelle la série doit descendre. Newton a donné pour cela une règle fort commode, qu'on appelle ordinairement *le parallélogramme de Newton*. Elle est expliquée de la manière la plus claire et la plus détaillée dans un excellent ouvrage de Cramer, qui a pour titre, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, *Gen.* 1750. Nos lecteurs pourront y étudier plus à fond cette théorie, lorsqu'ils auront acquis les autres connoissances nécessaires pour entendre la géométrie des courbes.

401. *Scholie II.* On a dû remarquer, et on verra encore dans la suite l'usage et l'utilité des *coëfficients indéterminés*, surtout pour la formation des suites. Cette méthode est, pour ainsi dire, la clef de toute l'analyse; on ne sauroit donc se la rendre trop familière. En voici quelques applications, qui sont un peu étrangères à l'objet présent; mais on pardonnera cette petite digression en faveur de son utilité.

Soit la quantité $\frac{1}{a+x}$ à transformer en une serie qui marche suivant les puissances de x qu'on suppose moindre que a. Je feins qu'on ait $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. Donc, en multipliant tout par $a+x$, ordonnant par rapport à x, et mettant tous les termes dans le second membre, on aura,

$$o = \left\{\begin{matrix} +aA \\ \\ -1 \end{matrix}\right. \left.\begin{matrix} +aB \\ +A \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +aC \\ +B \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +aD \\ +C \end{matrix}\right\} x^3 + \text{etc.}$$

Egalons à zéro chacune des parties du second membre; nous aurons $aA - 1 = o$; $(aB + A)x = o$; $(aC + B)x^2 = o$; $(aD + C)x^3 = o$, etc.; équations qui donnent $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{A}{a} = -\frac{1}{a^2}$, $C = -\frac{B}{a} = +\frac{1}{a^3}$, $D = -\frac{C}{a} = -\frac{1}{a^4}$, etc.

Ainsi on aura $\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} +$ etc. comme on le trouve par la division (69).

Soit la quantité $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ à développer en série, x étant $< a$. Cette opération peut se faire par la formule du binome (145); mais on peut parvenir au même but au moyen des coëfficients indéterminés. Je feins pour cela qu'on ait

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

Donc, en quarrant chaque membre, ordonnant par rapport à x, et mettant tout dans le second membre, on aura,

$$0 = \left\{\begin{matrix} + A^2 \\ \\ - a \end{matrix}\right. \left.\begin{matrix} + 2AB \\ - 1 \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + 2AC \\ + B^2 \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + 2AD \\ + 2BC \end{matrix}\right\} x^3 + \text{etc.}$$

D'où l'on tire $A^2 - a = 0$; $(2AB - 1)x = 0$; $(2AC + B^2)x^2 = 0$; $(2AD + 2BC)x^3 = 0$; etc.; équations qui donnent

$$A = \sqrt{a},\ B = \frac{1}{2\sqrt{a}},\ C = -\frac{1}{8a\sqrt{a}},\ D = \frac{1}{16a^2\sqrt{a}},\ \text{etc.}$$

Donc,

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}} - \frac{x^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{x^3}{16a^2\sqrt{a}} - \text{etc.}$$

Qu'on ait la quantité $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}$ à transformer en série, x étant plus petite que chacune des autres quantités a, b, c, d. Cette opération pourroit se faire en développant successivement le numérateur et le dénominateur en séries, et divisant ensuite la première série par la seconde. Mais on parviendra beaucoup plus facilement et plus promptement au même but par la méthode des coëfficients indéterminés. Je feins donc qu'on ait . . . . . .

$$\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

Quarrant chaque membre, puis multipliant tout par le dénominateur résultant $b + cx + dx^2$, mettant tout dans le second membre ordonné par rapport à x, on trouvera:

$$o = \left\{ \begin{matrix} A^2b + 2ABb \\ \pm A^2c \\ \cdot\ \cdot \\ -a \quad -1 \end{matrix} \right\} x + \left\{ \begin{matrix} 2ACb \\ + B^2b \\ + 2ABc \\ + A^2d \end{matrix} \right\} x^2 + \left\{ \begin{matrix} 2BCb \\ + 2ADb \\ + B^2c \\ + 2ACc \\ + 2ABd \end{matrix} \right\} x^3 + \text{etc.}$$

D'où l'on tire $A^2b - a = 0$, $(2ABb + A^2c - 1)x = 0$, $(2ACb + B^2b + 2ABc + A^2d)x^2 = 0$, $(2BCb + 2ADb + B^2c + 2ACc + 2ABd)x^3 = 0$, etc., équations qui donnent $A = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $B = \frac{b - ac}{2b\sqrt{ab}}$, $C = -\frac{(b-ac)^2}{8ab^2\sqrt{ab}} - \frac{c(b-ac)}{2b^2\sqrt{ab}} - \frac{ad}{2b\sqrt{ab}}$, $D = \frac{(b-ac)a}{4ab^2} \times \left(\frac{(b-ac)^2}{4ab\sqrt{ab}} + \frac{c(b-ac)}{2b\sqrt{ab}} - \frac{ad}{\sqrt{ab}}\right) + \left(\frac{b-ac}{4b^2a}\right) \times \left(\frac{bc + 3ac^2}{2b\sqrt{ab}}\right) + \frac{acd}{2b^2\sqrt{ab}}$, etc. Substituant ces valeurs de A, B, C, D, etc. dans la série feinte, on aura l'expression de $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}$ en grandeurs toutes données.

402. Problême II. *La valeur de* x *étant donnée par la suite* $x = a + by + cy^2 + dy^3 +$ etc., *on propose de former une suite inverse qui donne* y *en* x.

On appelle ces sortes d'opérations *retours des suites.*

La suite $x = a + by + cy^2 + dy^3 +$ etc., étant supposée convergente, il est clair que la quantité y doit être fort petite. Donc, si l'on suppose $x - a = z$, et par conséquent $z = by + cy^2 + dy^3 +$ etc., la quantité z sera aussi très-petite. La première valeur approchée de z est donnée par l'équation $z = by$; d'où l'on tire $y = \frac{z}{b}$. Ainsi le premier terme de la série, qui doit donner y en z, est $\frac{z}{b}$, et les autres termes contiendront z^2, z^3, z^4, etc., ce qui produira une série convergente. Je feins qu'on ait $y = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ etc., et par conséquent, en ordonnant par rapport à z,

$$\begin{array}{rl} by = & + bAz + bBz^2 + Cbz^3 + \text{etc.} \\ + cy^2 = & \quad + cA^2z^2 + 2cABz^3 + \text{etc.} \\ + dy^3 = & \qquad + dA^3z^3 + \text{etc.} \\ \text{etc.} = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \\ - z = & - z. \end{array}$$

Or on a $by + cy^2 + dy^3 +$ etc. $- z = 0$. Donc le second membre de l'expression précédente sera aussi $= 0$. Donc, en égalant séparément à zéro, chaque terme de ce membre, on aura $(bA - 1)z = 0$, ou $A = \frac{1}{b}$; $(bB + cA^2)z^2 = 0$, ou $B = -\frac{c}{b^3}$; $(bC + 2cAB + dA^3)z^3 = 0$, ou $C = \frac{2c^2 - bd}{b^5}$; etc. Ainsi la série feinte devient $y = \frac{z}{b} - \frac{cz^2}{b^3} + \frac{(2c^2 - bd)z^3}{b^5} -$ etc. ou bien en chassant z, $y = \frac{x-a}{b} - \frac{c(x-a)^2}{b^3} + \frac{(2c^2 - bd)(x-a)^3}{b^5}$ — etc.; série convergente.

403. *Scholie*. Qu'on ait en général $x + ax^2 + bx^3 + dx^4$ + etc. $= gy + hy^2 + iy^3 + ky^4 +$ etc., équation dont les deux membres sont supposés des séries convergentes, et qu'il s'agisse par exemple de trouver la valeur de y en x. Les deux séries étant supposées convergentes, il est clair que x et y doivent être des quantités fort petites. Donc, pour former le premier terme de la série cherchée, on aura l'équation $x = gy$, et par conséquent $y = \frac{x}{g}$.

Cela posé, je feins qu'on ait $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ + etc. Et par conséquent, en substituant pour y, y^2, y^3, etc., leurs valeurs, mettant toute l'équation $x + ax^2 + bx^3 + dx^4 +$ etc. $= gy + hy^2 + iy^3 +$ etc. dans le second membre, et ordonnant par rapport à x, on aura

$$\begin{array}{rl} gy = & gAx + gBx^2 + gCx^3 + \text{etc.} \\ + hy^2 = & \quad + hA^2x^2 + 2hABx^3 + \text{etc.} \\ + iy^3 = & \qquad + iA^3x^3 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} = & \text{etc.} \\ - x = & - x \\ - ax^2 = & \ldots - ax^2 \\ - bx^3 = & \ldots\ldots\ldots - bx^3 \\ - \text{etc.} - & \ldots\ldots\ldots\ldots - \text{etc.} \end{array}$$

Or dans cette expression la somme de toutes les parties de la gauche est égale à zéro, et par conséquent la somme de toutes les parties de la droite doit aussi être égale à zéro. Donc, en égalant séparément à zéro les facteurs de x, de x^2, de x^3, etc., on aura $gA - 1 = 0$, ou $A = \frac{1}{g}$; $gB + hA^2 - a = 0$, ou $B = \frac{a - hA^2}{g} = \frac{ag^2 - h}{g^3}$; $gC + 2hAB + iA^3 - b = 0$, ou $C = \frac{b - iA^3 - 2hAB}{g} = \frac{bg^4 - ig - 2h(ag^2 - h)}{g^5}$, etc. Ainsi on aura

$$y = \frac{x}{g} + \frac{(ag^2 - h)x^2}{g^3} + \frac{(bg^4 - ig - 2h)(ag^2 - h)x^3}{g^5} + \text{etc.},$$

ce qui forme une série convergente.

Remarque générale.

404. Toutes les séries que nous avons considérées dans les articles précédents ont été regardées comme convergentes, parce que l'objet qu'on a dû se proposer en les formant ayant été de faire trouver par approximation une quantité qu'on ne peut avoir exactement, ou d'une manière commode sous sa forme naturelle, il faut pour cela que les termes de la série aillent en décroissant, afin qu'il suffise d'en prendre un certain nombre du commencement pour avoir à peu de chose près la quantité qu'on cherche.

CHAPITRE XXIV.

De l'élimination dans les équations de tous les degrés ; de l'évanouissement des radicaux.

405. Lorsqu'un problême a plusieurs conditions, et que ces conditions sont exprimées par autant d'équations particulières, les inconnues peuvent être éliminées successivement, et on parvient à une équation où il n'y a plus qu'une seule inconnue. Nous en avons vu plusieurs exemples. Mais, comme ces exemples ne regardoient que les premiers degrés, et que les équations où les inconnues se trouvent sont quelquefois fort élevées, je crois devoir expliquer ici brièvement la manière de faire l'élimination pour toutes sortes d'équations. J'ai remis à traiter cette théorie à part, pour ne pas interrompre d'autres recherches par des calculs généraux qui n'y auroient pas eu un rapport immédiat. Les mêmes principes nous serviront à faire disparoître les radicaux. Allons par ordre en commençant par les cas les plus simples.

406. Si on a plusieurs équations et autant d'inconnues qui n'y montent qu'au premier degré, l'équation finale, c'est-à-dire, l'équation où il n'y aura plus qu'une seule inconnue mêlée avec des quantités données, sera toujours du premier degré. Cette équation peut se trouver en tirant des équations proposées différentes valeurs d'une même inconnue, et comparant successivement ces valeurs comme nous l'avons pratiqué dans l'article 132 et ailleurs. Mais on parviendra beaucoup plus promptement au même but si l'on emploie la méthode indiquée (131). Voici le procédé du calcul.

407. Soient, premièrement, entre les deux inconnues x et y, et les données a, b, c, etc. les deux équations générales du premier degré,

$$ax + by + c = 0,$$
$$dx + ey + f = 0.$$

Pour éliminer l'une des deux inconnues, par exemple y, je multiplie tous les termes de la première équation par e, coëfficient de y dans la seconde, et tous les termes de la seconde par b, coëfficient de y dans la première; ce qui me donne

$$eax + eby + ec = 0,$$
$$bdx + bey + bf = 0.$$

Retranchant la seconde de ces équations de la première, on aura $eax - bdx + ec - bf = 0$, équation où il n'y a plus que x d'inconnue, et d'où l'on tire $x = \frac{bf - ce}{ae - bd}$.

La valeur de y se trouve, ou en substituant cette valeur de x dans l'une des deux équations primitives, ou en multipliant la première de ces équations par d, la seconde par a, et retranchant l'une des équations résultantes de l'autre. On a de l'une ou de l'autre manière, $y = \frac{cd - af}{ae - bd}$.

Ces formules donneront la solution de tous les problêmes du premier degré, qui contiennent deux inconnues, en mettant pour a, b, c, etc., les valeurs individuelles qui résultent des conditions de chaque problême particulier.

408. En second lieu, soient entre les trois inconnues x, y, z, et les quantités données a, b, c, etc., les trois équations générales,

$$ax + by + cz + d = 0,$$
$$ex + fy + gz + h = 0,$$
$$ix + ky + bz + m = 0.$$

Pour éliminer d'abord z, je multiplie successivement la première par g, la seconde par c; puis la première par l, et la troisième par c; ce qui produit les quatre équations,

$$gax + gby + gcz + gd = 0,$$
$$cex + cfy + cgz + ch = 0,$$
$$lax + lby + lcz + ld = 0,$$
$$cix + cky + clz + em = 0.$$

Retranchant la seconde de ces équations de la première, et la quatrième de la troisième, on aura les deux équations :

$$(ga-ce)x+(gb-cf)y+gd-ch=0,$$
$$(la-ci)x+(lb-ck)y+ld-cm=0,$$

qui ne contiennent que les deux inconnues x et y, et qui se rapportent par conséquent à l'article précédent. On aura donc ici les valeurs de x et y, en mettant dans celles de l'article précédent, $ga-ce$ pour a, $gb-cf$ pour b, $la-ci$ pour d, $lb-ck$ pour e, $gd-ch$ pour c, $ld-cm$ pour f. Ainsi,

$$x=\frac{(ch-gd)(lb-ck)-(gb-cf)(cm-ld)}{(ga-ce)(lb-ck)-(gb-cf)(la-ci)},$$
$$y=\frac{(ga-ce)(cm-ld)-(ch-gd)(la-ci)}{(ga-ce)(lb-ck)-(gb-cf)(la-ci)}.$$

Ces expressions deviennent, en effectuant les multiplications indiquées, et réduisant,

$$x=\frac{bhl-chk+dgk-gbm+cfm-dfl}{cek-gak+afl-bel+big-cfi},$$
$$y=\frac{gam-cem+chi-ahl+del-gid}{cek-gak+afl-bel+bgi-cfi}.$$

Substituant ces valeurs de x et de y dans l'une des trois équations primitives, on aura une équation où il n'y aura plus que z d'inconnue, et d'où l'on tirera

$$z=\frac{ahk-dek+dfi-afm+bem-bih}{cek-agk+afl-bel+big-cfi}.$$

A l'aide de ces formules générales, on aura par de simples substitutions la solution de tous les problêmes du premier degré qui contiennent trois inconnues.

409. Il est clair qu'en opérant toujours de la même manière, on parviendra à déterminer toutes les inconnues, quels que soient leur nombre et celui des équations, toujours du premier degré, qui les contiennent.

Si l'on a quatre inconnues et quatre équations, on commencera par éliminer l'une des inconnues, ce qui réduira ce cas au précédent.

Si l'on a cinq inconnues et cinq équations, on éliminera l'une des inconnues et on réduira le probléme au cas précédent; ainsi de suite. Ces formules dérivent les unes des autres suivant une loi facile à reconnoître.

410. Soient maintenant entre les deux inconnues x et y, et les données a, b, c, etc., les deux équations suivantes, dont l'une est la plus générale du premier degré, l'autre la plus générale du second,

$$ax + by + c = 0,$$
$$dx^2 + ex + fy^2 + gy + hxy + i = 0.$$

On parviendra tout d'un coup à une équation où il n'y aura que x d'inconnue, en tirant de la première la valeur de y, et la substituant dans la seconde. Ce calcul donne

$$dx^2 + ex + f\left(\frac{-c-ax}{b}\right)^2 + (g + hx)\left(\frac{-c-ax}{b}\right) + i = 0;$$

équation déterminée du second degré, d'où l'on tirera la valeur de x. Substituant ensuite cette valeur dans la première équation primitive, on aura aussi la valeur de y.

411. L'équation finale, soit en x, soit en y, peut être trouvée par une autre méthode qui nous servira dans les cas suivants. Je suppose, pour abréger le calcul, $ax + c = \mathrm{A}$, $g + hx = \mathrm{B}$, $dx^2 + ex + i = \mathrm{C}$; nos deux équations primitives deviennent donc,

$$by + \mathrm{A} = 0,$$
$$fy^2 + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0.$$

Je multiplie la première par C, la seconde par A; je retranche le premier produit du second, et je trouve (en divisant le reste par y à cause de l'égalité à zéro),

$$\mathrm{A}fy + \mathrm{AB} - \mathrm{C}b = 0.$$

Je multiplie cette équation par b, et je multiplie l'équation $by + \mathrm{A} = 0$, par $\mathrm{A}f$; je retranche les deux équations résultantes l'une de l'autre; ce qui produit l'équation $\mathrm{A}^2f - b(\mathrm{AB} - \mathrm{C}b) = 0$, dans laquelle il n'y a point de y. Mettant pour A, B, C leurs valeurs, on aura

$$f(ax + c)^2 - b(ax + c)(g + hx) + b^2(dx^2 + ex + i) = 0.$$

On trouveroit de même l'équation finale en y.

412. Soient les deux équations générales du deuxième degré,

$$ax^2 + bx + cy^2 + dy + exy + f = o,$$
$$gx^2 + hx + iy^2 + ky + lxy + m = o.$$

Pour éliminer y, je suppose $d + ex = A$, $ax^2 + bx + f = B$, $k + lx = D$, $gx^2 + hx + m = E$; et j'ai les deux équations,

$$cy^2 + Ay + B = o,$$
$$iy^2 + Dy + E = o.$$

Cela posé, 1.° je multiplie la première par i, la seconde par c, et je retranche le second produit du premier; ce qui me donne $(Ai - Dc)y + Bi - Ec = o$, première équation où y n'est plus qu'au premier degré.

2.° Je multiplie la première des deux mêmes équations par E, la seconde par B; je retranche le second produit du premier; ce qui me donne (en divisant tout par y), $(Ec - Bi)y + AE - BD = o$, seconde équation où y n'est qu'au premier degré. Nous avons donc deux équations où y n'est qu'au premier degré. Ainsi, éliminant cette inconnue par leur moyen, on aura $(Bi - Ec)^2 + (Ai - Dc) \times (AE - BD) = o$. Mettant pour A, B, D, E leurs valeurs, on aura

$$(iax^2 + bix + if - cgx^2 - chx - cm)^2 + [id + iex - ck - clx][(d + ex)(gx^2 + hx + m) - (ax^2 + bx + f)(k + lx)] = o,$$

équation déterminée du quatrième degré.

On trouveroit de même l'équation finale en y.

413. Supposons qu'on ait en général les deux équations,

$$my^3 + ny^2 + py + q = o,$$
$$My^3 + Ny^2 + Py + Q = o,$$

dans lesquelles m, n, p, q, M, N, P, Q sont des quantités composées comme on voudra de l'inconnue x et de données, ou, pour nous exprimer suivant l'usage, des *fonctions* quelconques de x. Il s'agit d'éliminer y. Pour cela je multiplie la première équation par M, la seconde par m, et

je retranche le second produit du premier; ce qui me donne

$$(Mn - mN)y^2 + (Mp - mP)y + Mq - mQ = 0,$$

première équation où la plus haute puissance de y ne monte qu'au second degré.

Je multiplie encore la première des deux équations proposées par Q, la seconde par q; je retranche le second produit du premier, ce qui me donne (en divisant le reste par y),

$$(Qm - qM)y^2 + (Qn - qN)y + Qp - qP = 0,$$

seconde équation où la plus haute puissance de y ne monte qu'au second degré.

Au moyen des deux dernières équations on parviendra, comme dans l'article précédent, à faire disparoître entièrement y. Soient, pour abréger le calcul, $Mn - mN = \alpha$, $Mp - mP = \beta$, $Mq - mQ = \gamma$, $Qn - qN = \delta$, $Qp - qP = \lambda$. On trouvera $(-\beta\lambda + \gamma\delta)(\gamma\beta + \alpha\delta) + (\gamma^2 + \alpha\lambda)^2 = 0$, équation où il n'y a point de y.

Cette équation est la même chose que $\gamma^4 + 2\gamma^2\alpha\lambda + \alpha\lambda(\alpha\lambda - \beta\delta) - \beta^2\gamma\lambda + \beta\delta\gamma^2 + \alpha\delta^2\gamma = 0$. Et comme $\alpha\lambda - \beta\delta = (Mn - mN).(Qp - qP) - (Mp - mP).(Qn - qN) = (mQ - Mq).(Pn - pN) = -\gamma(Pn - pN)$, notre équation deviendra $\gamma^4 + 2\gamma^2\alpha\lambda - \alpha\lambda\gamma(Pn - pN) - \beta^2\gamma\lambda + \beta\delta\gamma^2 + \alpha\delta^2\gamma = 0$. Alors elle est divisible par γ qui affecte tous ses termes, et ce facteur lui est inutile, c'est-à-dire, qu'on ne peut pas supposer pour équation finale $\gamma = 0$; car cela donneroit $Mq = mQ$, supposition particulière qui altéreroit la généralité des deux équations primitives. La vraie équation résultante de l'élimination de y est donc

$$\gamma^3 + 2\gamma\alpha\lambda - \alpha\lambda(Pn - pN) - \beta^2\lambda + \beta\delta\gamma + \alpha\delta^2 = 0.$$

Pour faire une application de ces formules, soient les deux équations,

$$xy^2 + by + x^3 + a = 0,$$
$$y^2 + cy + bx^2 + h = 0.$$

Nous avons dans ce cas $m = x$, $n = 0$, $p = b$, $q = x^3 + a$ $M = 1$, $N = 0$, $P = c$, $Q = bx^2 + h$, $\alpha = 0$, $\beta = b - cx$ $\gamma = x^3 + a - x(bx^2 + h)$, $\delta = 0$, $\lambda = b(bx^2 + h) -$

$c(x^3+a)$. Donc l'équation finale est $\gamma^3 - \beta^2\gamma = 0$, c'est-à-dire,

$$[x^3+a-x(bx^2+h)]^3-(b-cx)^2 \cdot [b(bx^2+h)-c(x^3+a)]=0,$$

où il n'y a point de y.

414. Soient les deux équations générales,

$$my^4+ny^3+py^2+qy+r=0,$$
$$My^4+Ny^3+Py^2+Qy+R=0,$$

dans lesquelles la plus haute puissance de y est de quatre dimensions. On commencera par éliminer y^4 en multipliant la première par M, la seconde par m, et retranchant le second produit du premier, ce qui donne

$$(Mn-mN)y^3+(Mp-mP)y^2+(Mq-mQ)y+Mr-mR=0,$$

première équation où la plus haute puissance de y n'est que de trois dimensions.

Ensuite on multipliera la première équation *primitive* par R, la seconde par r, et on retranchera le second produit du premier; ce qui donne

$$(Rm-rN)y^3+(Rn-rN)y^2+(Rp-rP)y+Rq-rQ=0,$$

seconde équation où la plus haute puissance de y n'est que de trois dimensions. On a donc deux équations qui ne contiennent plus que y^3, et les puissances inférieures de y, et qui se traitent par conséquent comme celles de l'article précédent.

On procédera semblablement lorsque, dans les deux équations primitives, la plus haute puissance de y sera de plus de quatre dimensions.

415. *Scholie I.* Si dans l'équation finale il se trouve des facteurs inutiles, comme cela arrive quelquefois, ces sortes de facteurs peuvent souvent se reconnoître sans peine, en employant des abréviations de calcul pareilles à celles qui nous ont servi à trouver (413) l'équation finale résultante de l'élimination de y. Du moins ils peuvent toujours être déterminés en décomposant, par les méthodes du chapitre XIX, l'équation finale en ses diviseurs com-

mensurables. Ensuite l'examen des conditions du probléme qu'on cherche à résoudre apprendra à discerner parmi les diviseurs ceux qui doivent être utiles d'avec ceux qui doivent être rejetés.

416. *Scholie II.* La même méthode s'applique à l'élimination des inconnues lorsqu'il y en a plus de deux, quels que soient les degrés des équations qui contiennent. Car, si on a trois inconnues x, y, z, et trois équations, il est clair qu'avec la première et la seconde équation, on peut former une équation qui ne contienne plus que deux des trois inconnues, par exemple x et y. De même, en combinant la première équation avec la troisième, on pourra former encore une équation qui ne contiendra que x et y. Ainsi on aura deux équations qui ne contiendront plus que les deux inconnues x et y; ce qui rappelle le probléme aux cas précédents.

Si on avoit quatre inconnues et quatre équations, en combinant successivement la première équation avec les trois autres, on formeroit trois équations où il n'y auroit que trois inconnues; ce qui rappelle ce cas au précédent; ainsi de suite.

Evanouissement des radicaux.

417. Supposons que la valeur d'une inconnue soit donnée par une expression radicale; que, par exemple, on ait $x=\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{(c^3+d^3)}$, et qu'on veuille savoir quelle seroit l'équation qui auroit produit l'expression proposée : la question est de trouver une équation en x, laquelle ne contienne point de radicaux. Voici la manière de résoudre ces sortes de problémes.

418. D'abord, si une expression ne contient qu'un radical, par exemple, si on a $x=\sqrt[3]{ab^2}$, on fera évanouir le radical, en élevant chaque membre au cube, ce qui donnera $x^3=ab^2$, qui est une équation du troisième degré, de laquelle résulte l'expression proposée.

Si on avoit $x=a+\sqrt[3]{[c^3+b^2\sqrt[3]{cd}]}$, on commence-

roit par transposer a, et on auroit $x - a = \sqrt[3]{[c^3 + b^2\sqrt{cd}]}$.
Elevant chaque membre au cube, on auroit $(x-a)^3 = c^3 + b^2 \sqrt{cd}$. Transposant c^3, on auroit $(x - a^3) - c^3 = b^2\sqrt{cd}$. Elevant chaque membre au quarré, on auroit enfin

$$[(x - a)^3 - c^3]^2 = b^4 cd,$$

équation du sixième degré, de laquelle résulte l'expression proposée.

Si on avoit à dégager l'inconnue x d'une équation de cette espèce $x = m + \sqrt[3]{[ab^2 + c^2 \sqrt{(dx + \sqrt{ghkx})}]}$, 1.° on commenceroit par transposer m, et élevant tout au cube, on auroit $(x - m)^3 = ab^2 + c^2 \sqrt{(dx + \sqrt{ghkx})}$. 2.° On transposeroit ab^2, et élevant tout au quarré, on auroit $[(x - m)^3 - ab^2]^2 = c^4 dx + c^4 \sqrt{ghkx}$. 3.° On transposeroit $c^4 dx$, et élevant tout au quarré, on auroit

$$[((x - m)^3 - ab^2)^2 - c^4 dx]^2 = c^8 ghkx,$$

équation du douzième degré qu'il faudroit résoudre pour avoir x.

419. Lorsque dans une expression il se trouve plusieurs radicaux qui se suivent par voie d'addition ou de soustraction, comme cela arrive dans l'exemple de l'art. 417, il est un peu plus difficile de faire évanouir tous les radicaux. Cette opération peut s'exécuter ainsi en général.

Mettez à la place de chaque radical une nouvelle inconnue, et vous aurez une équation où il n'y aura point de radical : vous aurez de plus autant d'équations à deux termes qu'il y avoit de radicaux ; et, en élevant chacune de ces équations à la puissance de même indice que le radical qui s'y trouve, vous aurez encore des équations où il n'y aura point de radicaux. Eliminez successivement toutes les inconnues mises à la place des radicaux, et vous aurez une équation finale qui sera celle qu'on demandoit.

Ainsi, par exemple, étant donnée l'expression $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{[c^3 + d^3]}$, je fais $y = \sqrt[3]{ab^2}$, $z = \sqrt[3]{[c^3 + d^3]}$, et par conséquent $x - y - z = 0$; $y^3 - ab^2 = 0$; $z^3 - c^3 - d^3 = 0$. Ensuite, au moyen de ces équations, j'élimine successi-

vement y et z en cette sorte. La première donne $z=x-y$, et par conséquent $z^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$. Substituant cette valeur dans la troisième, on aura entre x et y les deux équations, $y^3-ab^2=0$; $-y^3+3xy^2-3x^2y+x^3-c^3-d^3=0$; ou bien (en faisant, pour abréger le calcul), $ab^2=A$, $3x=B$, $3x^2=C$, $x^3-c^3-d^3=D$, . . . $y^3-A=0$; $-y^3+By^2-Cy+D=0$.

La question n'est donc plus que d'éliminer y de ces deux équations; cela s'exécute par les moyens exposés ci-dessus, et on trouve

$$(D-A)^3+3ACB(D-A)-AC^3+A^2B^3=0,$$

c'est-à-dire (en remettant pour A, B, C, D, leurs valeurs),

$$(x^3-c^3-d^3-ab^2)^3+27ab^2x^3(x^3-c^3-d^3-ab^2)-27ab^2x^6+27a^2b^4x^3=0,$$

équation du neuvième degré, de laquelle résulte la valeur proposée de x.

CHAPITRE XXV.

Sommation de différentes suites de nombres.

420. LA sommation des suites, c'est-à-dire, l'art de trouver, d'après la loi suivant laquelle se forme une suite composée d'un nombre fini ou infini de termes, une expression finie qui revienne au résultat qu'on obtiendroit, si l'on ajoutoit actuellement ensemble tous les termes de la suite, est un objet très-important dans l'analyse. Car les suites se présentent ou peuvent être introduites dans une infinité de recherches; et si on les savoit sommer en général, il n'y a presque point de problêmes qu'on ne résolût en rigueur. Malheureusement le nombre des suites qu'on sait sommer est assez petit, et on est réduit pour l'ordinaire à tâcher de les rendre convergentes, afin que l'assemblage de leurs premiers termes suffise pour en représenter sensiblement la totalité. Les suites que je vais considérer ici ont l'avantage de pouvoir être sommées, et de s'appliquer utilement à quelques re-

cherches, comme on en rencontre des exemples dans les différentes parties des mathématiques.

421. Parmi les suites sommables, on trouve d'abord les progressions arithmétique et géométrique. J'ai donné dans les articles 161 et 185 les méthodes pour les sommer. Les suites que je vais maintenant considérer dérivent de celles-là; et, au moyen de quelques nouveaux artifices de calcul, on rappellera toute cette théorie aux mêmes principes. Commençons par des définitions et des notions qui nous seront nécessaires.

422. On appelle *nombres constants* une suite de nombres tous égaux entre eux : telle est la suite 1, 1, 1, 1, 1, 1, *etc.* dont chaque terme est représenté par l'unité; forme à laquelle toutes les suites de nombres constants peuvent être rappelées.

En ajoutant continuellement les termes de cette *suite*, on formera *la suite des nombres naturels* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc., en sorte que, dans celle-ci, le premier terme $1 = 1$; le second terme $2 = 1 + 1$; le troisième terme $3 = 1 + 1 + 1$; le quatrième terme $4 = 1 + 1 + 1 + 1$; ainsi de suite.

En ajoutant continuellement les termes de la suite des nombres naturels, on formera *la suite des nombres triangulaires* 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, etc., de sorte que, dans celle-ci, le premier terme $1 = 1$; le second terme $3 = 1 + 2$; le troisième terme $6 = 1 + 2 + 3$; le quatrième terme $10 = 1 + 2 + 3 + 4$; ainsi de suite.

Semblablement, en ajoutant continuellement les termes de la suite des nombres triangulaires, on formera *la suite des nombres pyramidaux* 1, 4, 10, 20, 35, 56, etc.

On voit qu'on peut former de nouvelles suites à l'*infini*, suivant la même loi.

Les nombres qui les composent s'appellent en général *nombres figurés*.

En élevant les termes de ces suites, au quarré, au cube, à la quatrième puissance, etc., on forme de nouvelles suites, excepté toutefois les suites des puissances des nombres

constants 1, 1, 1, 1, 1, etc., dont tous les termes sont 1, dans tous les cas.

423. Si l'on prend une progression arithmétique qui commence par l'unité, et dont la différence soit d'ailleurs quelconque, on formera, par l'addition successive des termes de cette progression, de nouvelles suites de nombres qu'on appelle *nombres polygones*. Par exemple, soient les progressions arithmétiques :

$\div$ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . etc.
$\div$ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . etc.
$\div$ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . etc.
etc.

qui commencent toutes par 1, et dont les différences sont respectivement 1, 2, 3, etc. ; il en résultera les suites :

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, etc.
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, etc.
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, etc.
etc.

dont la première est la suite des nombres triangulaires, qui font ainsi partie des nombres polygones ; la seconde est la suite des quarrés des nombres naturels ; la troisième est la suite des nombres qu'on nomme *pentagones* ; etc.

Il est inutile de pousser plus loin ces détails qui n'ont pas de bornes.

424. Problème I. *Soit la progression arithmétique quelconque :*

$\div$ f . g . h . i . k . . . . p,

dont f *et* p *sont les extrêmes, d est la différence additive ou soustractive, et dont je nomme* S *la somme qui se trouve* (161): *on demande la somme de la suite :*

(A) $S \pm f$, $S \pm (f+g)$, $S \pm (f+g+h)$, $S \pm (f+g+h+i)$, etc.

qui se forme en ajoutant successivement à S, *avec le signe* + *ou* —, *le premier terme de la progression, la somme des deux premiers termes, la somme des trois premiers termes, etc.*

On a, par la propriété de la progression arithmétique

$g = f + d$, $h = f + 2d$, $i = f + 3d$, $k = f + 4d$, etc. Substituant ces valeurs dans la suite (A), on verra que cette suite forme une progression arithmétique dont le premier terme est $S + d$, et la raison d. Ainsi, après avoir déterminé (157) le dernier terme de cette progression, on en trouvera la somme (161).

425. Problème II. *Soit la progression géométrique:*

$$\div\div \mathrm{a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 \ldots\ldots ar^{n-1}},$$

dont a *est le premier terme*, $\frac{1}{\mathrm{r}}$ *la raison*, n *le nombre des termes, et dont je nomme* S *la somme qui se trouve* (185): *on demande la somme de la suite*

$$\mathrm{S \pm a, S \pm (a + ar), S \pm (a + ar + ar^2), S \pm (a + ar + ar^2 + ar^3)}, \text{ etc.}$$

Considérons séparément les deux cas qu'emporte le double signe; et appelons A et B les deux suites qu'ils donnent.

Or, 1.° en mettant pour S sa valeur $\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$, on verra (en nommant M le terme $\frac{ar^n}{1-r}$, pour abréger), que le premier terme de la suite (A) = ...

$$S + a = \frac{2a}{1-r} - \frac{ar}{1-r} - M;$$

que le second terme de cette suite = ...

$$(S + a) + ar = \frac{2a}{1-r} - \frac{ar^2}{1-r} - M;$$

que le troisième terme $= (S + a + ar) + ar^2 =$ . . . . .

$$\frac{2a}{1-r} - \frac{ar^3}{1-r} - M;$$

que le quatrième terme $= (S + a + ar + ar^2) + ar^3 =$

$$\frac{2a}{1-r} - \frac{ar^4}{1-r} - M.$$

Ainsi de suite.

Par où l'on voit que la suite (A) est composée de trois parties, dont la première est la quantité constante $\frac{2a}{1-r}$

qu'il faut répéter positivement autant de fois n qu'il y a de termes, ce qui donne le produit $\frac{2an}{1-r}$; la seconde est la quantité constante M, ou $\frac{ar^n}{1-r}$ qu'il faut répéter négativement le nombre n de fois, ce qui donne le produit $-\frac{nar^n}{1-r}$; enfin la troisième forme la progression géométrique $\div\div \frac{ar}{1-r} : \frac{ar^2}{1-r} : \frac{ar^3}{1-r} : \frac{ar^4}{1-r} \ldots \frac{ar^n}{1-r}$, dont $\frac{ar}{1-r}$ est le premier terme, $\frac{1}{r}$ la raison, n le nombre de termes, et par conséquent $\frac{ar^2}{(1-r)^2} - \frac{ar^{n+1}}{(1-r)^2}$ la somme qu'il faut prendre négativement. Donc, en rassemblant les trois parties qui doivent composer la suite (A), on aura

$$A = \frac{2an}{1-r} - \frac{nar^n}{1-r} - \frac{ar^2}{(1-r)^2} + \frac{ar^{n+1}}{(1-r)^2}.$$

2.° Pour la suite (B), on trouvera que le premier terme $= S - a = \frac{ar}{1-r} - M$;

Que le second terme $= (S - a) - ar = \frac{ar^2}{1-r} - M$;

Que le troisième terme $= (S - a - ar) - ar^2 = \frac{ar^3}{1-r} - M$;

Que le quatrième terme $= (S - a - ar - ar^2) - ar^3 = \frac{ar^4}{1-r} - M$.

Ainsi de suite.

Par conséquent la suite (B) est composée de deux parties, dont la première (qu'il faut prendre positivement) forme la progression géométrique $\div\div \frac{ar}{1-r} : \frac{ar^2}{1-r} : \frac{ar^3}{1-r} : \frac{ar^4}{1-r} \ldots \frac{ar^n}{1-r}$, ayant $\frac{ar}{1-r}$ pour premier terme, $\frac{1}{r}$ pour raison, n pour nombre de termes,

$\frac{ar}{(1-r)^2} - \frac{ar^{n+1}}{(1-r)^2}$ pour somme (185) ; la seconde partie est la quantité M, ou $\frac{ar^n}{1-r}$ qu'il faut prendre n fois négativement. Ainsi

$$B = \frac{ar}{(1-r)^2} - \frac{ar^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{1-r}.$$

426. *Corollaire.* Supposons que la progression géométrique proposée $\div\div a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 \ldots\ldots\ ar^{n-1}$ soit décroissante à l'infini : alors r est un nombre fractionnaire, $1-r$ est un nombre positif, et n est un nombre infini. D'où il résulte,

1.° Que dans la valeur de A, le premier terme $\frac{2an}{1-r}$ est infini ; le troisième terme $\frac{ar^2}{(1-r)^2}$ est une quantité finie, qui doit être négligée par rapport au *premier* terme ; le quatrième $\frac{ar^n}{(1-r)^2}$ est infiniment petit, puisque dans la fraction r le numérateur étant moindre que le dénominateur, la puissance r^n devient infiniment petite, lorsque n devient infini. Enfin le second terme $\frac{nar^n}{1-r}$, ou $\frac{a}{1-r} \times nr^n$, doit être aussi considéré comme infiniment petit ; car, en mettant à l'écart le facteur fini $\frac{a}{1-r}$, qui ne peut influer en rien sur la nature de ce terme, et supposant $\frac{1}{r} = q$, l'autre facteur nr^n deviendra $\frac{n}{q^n}$. Or, q étant > 1, et n étant un nombre entier positif, on voit que la fraction $\frac{n}{q^n}$ va continuellement en diminuant à mesure que n augmente. En effet, soit, par exemple, $q = 2$, et faisons successivement $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, etc., la fraction $\frac{n}{q^n}$ deviendra respectivement $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}$, etc. ; si l'on prenoit $q = 3$,

t qu'on fit successivement $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$, $=6$, etc., la fraction $\frac{n}{q^n}$ deviendroit $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{27}$, $\frac{4}{81}$, $\frac{5}{243}$, etc. D'où il faut conclure que lorsque le nombre n devient infini, la fraction $\frac{n}{q^n}$ devient infiniment petite, et que par conséquent le terme $\frac{a}{1-r} \times \frac{n}{q^n}$, ou $\frac{nar^n}{1-r}$ doit être négligé. Ainsi la valeur de la suite A se réduit au seul premier terme $\frac{2an}{1-r}$ qui est une quantité infinie, comme nous l'avons déja dit.

2.° Dans la valeur de la suite B, le second terme $\frac{ar^{n+1}}{(1-r)^2}$ est infiniment petit; le troisième terme $\frac{nar^n}{1-r}$ est aussi infiniment petit, comme dans la valeur de la suite A. Ainsi on a simplement $B = \frac{ar}{(1-r)^2}$; quantité finie.

Si à cette quantité on ajoute la somme $\frac{a}{1-r}$ de la progression proposée ∺ $a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 \ldots ar^{n-1}$, supposée maintenant décroissante à l'infini, on aura pour somme $\frac{ar}{(1-r)^2} + \frac{a}{(1-r)}$, ou $\frac{a}{(1-r)^2}$. Cette somme est à celle $\frac{a}{1-r}$ de la progression proposée, comme $\frac{1}{1-r} : 1$, ou comme 1 est à $1-r$, ou comme $\frac{1}{r}$ est à $\frac{1}{r} - 1$, c'est-à-dire, comme la raison de la progression proposée est à cette même raison diminuée de l'unité.

427. Problême III. *Sommer une suite dont les termes sont une même puissance entière quelconque positive des termes d'une progression arithmétique.*

Soit la progression arithmétique quelconque :

$$\div f \cdot g \cdot h \cdot i \cdot k \ldots\ldots\ldots\ldots p,$$

dont f est le premier terme, p le dernier, d la différenc

quelconque additive ou soustractive. On aura, par la nature de la progression, $g = f + d$, $h = g + d$, $i = h + d$, $k = i + d$, etc. Donc, en élevant ces quantités au quarré, au cube, à la quatrième puissance, etc., on formera les tables suivantes :

I.

$$
\begin{aligned}
g^2 &= f^2 + 2fd + d^2 \\
h^2 &= g^2 + 2gd + d^2 \\
i^2 &= h^2 + 2hd + d^2 \\
k^2 &= i^2 + 2id + d^2
\end{aligned}
$$

etc.

II.

$$
\begin{aligned}
g^2 - f^2 &= 2fd + d^2 \\
h^2 - g^2 &= 2gd + d^2 \\
i^2 - h^2 &= 2hd + d^2 \\
k^2 - i^2 &= 2id + d^2
\end{aligned}
$$

etc.

III.

$$
\begin{aligned}
g^3 &= f^3 + 3f^2d + 3fd^2 + d^3 \\
h^3 &= g^3 + 3g^2d + 3gd^2 + d^3 \\
i^3 &= h^3 + 3h^2d + 3hd^2 + d^3 \\
k^3 &= i^3 + 3i^2d + 3id^2 + d^3
\end{aligned}
$$

etc.

IV.

$$
\begin{aligned}
g^3 - f^3 &= 3f^2d + 3fd^2 + d^3 \\
h^3 - g^3 &= 3g^2d + 3gd^2 + d^3 \\
i^3 - h^3 &= 3h^2d + 3hd^2 + d^3 \\
k^3 - i^3 &= 3i^2d + 3id^2 + d^3
\end{aligned}
$$

etc.

V.

$$
\begin{aligned}
g^4 &= f^4 + 4f^3d + 6f^2d^2 + 4fd^3 + d^4 \\
h^4 &= g^4 + 4g^3d + 6g^2d^2 + 4gd^3 + d^4 \\
i^4 &= h^4 + 4h^3d + 6h^2d^2 + 4hd^3 + d^4 \\
k^4 &= i^4 + 4i^3d + 6i^2d^2 + 4id^3 + d^4
\end{aligned}
$$

etc.

VI.

$$g^4 - f^4 = 4f^3d + 6f^2d^2 + 4fd^3 + d^4$$
$$h^4 - g^4 = 4g^3d + 6g^2d^2 + 4gd^3 + d^4$$
$$i^4 - h^4 = 4h^3d + 6h^2d^2 + 4hd^3 + d^4$$
$$k^4 - i^4 = 4i^3d + 6i^2d^2 + 4id^3 + d^4$$
etc.

Cela posé, 1.° si l'on veut avoir la somme des premières puissances des termes de la progression arithmétique, c'est-à-dire, la somme de cette progression même, on ajoutera ensemble les équations de la table II; ce qui donnera $k^2 - f^2 = 2d(f + g + h + i) + 4d^2$. Alors, on voit, par la manière dont cette équation se forme, que si l'on nomme S la somme totale de la progression arithmétique proposée, et n le nombre des termes, on aura $p^2 - f^2 = 2d(S - p) + (n - 1)d^2$; d'où l'on tire

$$S = \frac{p^2 - f^2 - (n-1)d^2 + 2pd}{2d}.$$

Si l'on substitue pour p sa valeur $f + (n-1)d$, cette formule deviendra $S = \frac{n(2f + (n-1)d)}{2}$, comme on l'a trouvé dans l'article 161.

2.° Pour avoir la somme des quarrés des termes de notre progression arithmétique, on ajoutera ensemble les équations de la table IV; et on aura

$$k^3 - f^3 = 3d(f^2 + g^2 + h^2 + i^2) + 3d^2(f + g + h + i) + 4d^3.$$

Par où l'on voit que si n étant toujours le nombre des termes de la progression, S la somme de ces termes, on nomme de plus S′ la somme de leurs quarrés, on aura

$$p^3 - f^3 = 3d(S' - p^2) + 3d^2.(S - p) + (n-1)d^3.$$

D'où l'on tire (en mettant pour S sa valeur trouvée ci-dessus, et dégageant S′),

$$S' = \frac{2p^3 - 2f^3 + 3dp^2 + 3df^2 + (n-1)d^3}{6d}.$$

3.° Pour les cubes, on ajoutera ensemble les équations de la table VI, et on aura $k^4 - f^4 = 4d(f^3 + g^3 + h^3 + i^3)$

$+ 6d^2(f^2+g^2+h^2+i^2) + 4d^3(f+g+h+i) + 4d^4.$
Donc, en conservant les dénominations précédentes, et nommant de plus S″ la somme des cubes des termes de la progression arithmétique, on aura

$$p^4 - f^4 = 4d(S'' - p^3) + 6d^2(S' - p^2) + 4d^3(S - p) + 4d^4.$$

D'où l'on tire (en substituant pour S, S′, leurs valeurs trouvées ci-dessus, et dégageant S″),

$$S'' = \frac{p^4 - f^4 + (2p^3 + 2f^3)d + (p^2 - f^2)d^2}{4d}.$$

En procédant toujours de la même manière pour les puissances quatrième, cinquième, sixième, etc., et observant la loi suivant laquelle toutes ces suites se forment, on trouvera en général que si, pour la plus grande simplicité des expressions, on désigne par $S^{(m-1)}$, la somme des puissances $m-1$ des termes de la progression arithmétique, par $S^{(m-2)}$ la somme des puissances $m-2$, par $S^{(m-3)}$ la somme des puissances $m-3$, ainsi de suite; on trouvera, dis-je,

$$p^m - f^m = md(S^{(m-1)} - p^{m-1}) + \frac{m(m-1)d^2}{1.2}(S^{(m-2)} - p^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)d^3}{1.2.3}(S^{(m-3)} - p^{m-3}) + \text{etc.}$$

Cette suite s'arrête toujours, m étant un nombre entier positif; et en faisant successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=4$, etc., on obtiendra la somme des puissances entières positives quelconques des termes de la progression arithmétique. En effet :

Soit d'abord $m=1$: on aura $p - f = d(S^{(0)} - 1)$. Sur quoi il faut remarquer que $S^{(0)}$ représentant la somme d'une suite de termes dont chacun seroit élevé à la puissance 0, et vaudroit par conséquent 1, on a $S^{(0)} = n$, le nombre des termes étant n. Donc $p - f = d(n-1)$, ou $p = f + (n-1)d$; ce qui dérive d'ailleurs immédiatement de la progression arithmétique.

Soit $m=2$: on aura $p^2 - f^2 = 2d(S^{(1)} - p) + d^2(S^{(0)} - 1)$. Mettant pour $S^{(0)}$ sa valeur n, et dégageant $S^{(1)}$, on trouvera le même résultat que ci-dessus.

Soit $m=3$: on aura $p^3-f^3=3d(S^{(2)}-p^2)+3d^2(S^{(1)}-p)+d^3(S^{(0)}-1)$. Et comme l'on connoît $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, on pourra trouver $S^{(2)}$, c'est-à-dire, la somme des quarrés des termes de la progression arithmétique.

Ainsi de suite.

428. *Corollaire.* Si l'on veut appliquer ces formules à la sommation des puissances des termes de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc., il faudra faire $f=1$, $d=1$, $p=n$; et on trouvera

$$S^{(1)}=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S^{(2)}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

$$S^{(3)}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4},$$

$$S^{(4)}=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30},$$

etc.

429. *Remarque.* Le probléme où l'on demanderoit, à l'imitation du précédent, la somme des puissances des termes d'une progression géométrique, se rapporte immédiatement à la sommation de ces progressions. Car si l'on a la progression géométrique $\div a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 \ldots . ar^{n-1}$, et qu'on élève chaque terme à la puissance m, on formera cette autre progression géométrique $\div a^m : a^m r^m : a^m r^{2m} : a^m r^{3m} : a^m r^{4m} : \ldots . a^m r^{m(n-1)}$, dont le premier terme est a^m, et la raison $\frac{1}{r^m}$.

430. Problême IV. *Trouver la somme* S *des nombres triangulaires*, n *étant le nombre des termes.*

On a, par la nature des nombres triangulaires,

$$S=1+3+6+10+15+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Or, nous pouvons regarder cette suite comme composée des suites A, B, C, D, etc. ajoutées ensemble terme à terme, lesquelles sont toutes la suite des nombres na-

turels avancée successivement d'un rang vers la droite:

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n,$$
$$B = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n - 1,$$
$$C = 0 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n - 2,$$
$$D = 0 + 0 + 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 3,$$
etc.

Cela posé, la somme de la suite A est $\frac{nn+n}{2}$; et on aura également, par la même formule, les sommes des suites B, C, D, etc., en mettant successivement $n-1$, $n-2$, $n-3$, etc., à la place de n. Ainsi $B = \frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$, $C = \frac{(n-2)^2+(n-2)}{2}$, $D = \frac{(n-3)^2+(n-3)}{2}$, etc. Donc, en ajoutant ensemble toutes ces sommes particulières, et faisant deux classes de termes correspondants, on aura

$$S = \tfrac{1}{2}[n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \ldots + 1]$$
$$+ \tfrac{1}{2}[n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1].$$

Or (428), des deux suites qui entrent dans cette expression, la première $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, et la seconde $n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) \ldots + 1 = \frac{nn+n}{2}$. Donc enfin ...

$$S = \frac{2n^3+3n^2+n}{12} + \frac{nn+n}{4} = \frac{n^3+3n^2+2n}{1 \times 2 \times 3}.$$

431. Problème V. *Trouver la somme* S *des nombres pyramidaux.*

On a, par la nature des nombres pyramidaux,

$$S = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + \ldots + \frac{n^3+3n^2+2n}{1.2.3}.$$

Cette suite peut être regardée comme composée des suites suivantes, lesquelles sont toutes la suite des nombres triangulaires avancée successivement d'un rang vers la droite:

$$A = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + \frac{nn + n}{2},$$

$$B = 0 + 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-1)^2 + n - 1}{2},$$

$$C = 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{(n-2)^2 + n - 2}{2},$$

$$D = 0 + 0 + 0 + 1 + 3 + \ldots + \frac{(n-3)^2 + n - 3}{2},$$

etc.

Or, en vertu de l'article précédent, $A = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$, $B = \frac{(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1)}{6}$, $C = \frac{(n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 2(n-2)}{6}$, $D = \frac{(n-3)^3 + 3(n-3)^2 + 2(n-3)}{6}$, etc. Donc, en ajoutant ensemble toutes ces sommes particulières et faisant trois classes de termes correspondants, on aura

$$\begin{aligned} S = &\tfrac{1}{6}[n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3 + \ldots + 1] \\ &+ \tfrac{1}{2}[n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \ldots + 1] \\ &+ \tfrac{1}{3}[n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1]. \end{aligned}$$

Or (428), des trois suites qui entrent dans cette expression, la première $n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3 + \ldots + 1 = \frac{n^4 + 2n^3 + n}{4}$; la seconde $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \ldots + 1 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$; la troisième ..... $n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1 = \frac{nn + n}{2}$.

Donc

$$S = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{24} + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{12} + \frac{nn + n}{6} = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{1 \times 2 \times 3 \times 4}.$$

On sommera semblablement les nombres figurés d'un ordre plus élevé.

432. Problème VI. *Soient deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique, d'un même nombre* n *de termes correspondants chacun à chacun :*

$$\div f : f + d \,.\, f + 2d \,.\, f + 3d \,.\, f + 4d \ldots f + (n-1)d,$$
$$\dot{\dot{\div}} a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 \ldots\ldots\ldots\ldots ar^{n-1}.$$

On demande la somme S qui résulte, en multipliant les termes de la première progression par ceux de la seconde.

On a, par hypothèse, $S = fa(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots r^{n-1}) + dar(1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 5r^4 + \ldots + (n-1)r^{n-2}$.

Or, 1.° le facteur $(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots + r^{n-1})$ de la première partie est une progression géométrique dont la somme $= \frac{1 - r^n}{1 - r}$ (185). Ainsi cette partie ..... $= fa \times \frac{(1 - r^n)}{1 - r}$.

2.° Pour trouver l'expression du facteur $(1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 5r^4 + \ldots + (n-1)r^{n-2}$ de la seconde partie, je le regarde comme composé des suites suivantes qui forment des progressions géométriques qui ont toutes la même raison $\frac{1}{r}$, et le même dernier terme r^{n-2} :

$$\begin{aligned}
A &= 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots\ldots + r^{n-2}, \\
B &= 0 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots\ldots + r^{n-2}, \\
C &= 0 + 0 + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots\ldots + r^{n-2}, \\
D &= 0 + 0 + 0 + r^3 + r^4 + \ldots\ldots + r^{n-2}, \\
E &= 0 + 0 + 0 + 0 + r^4 + \ldots\ldots + r^{n-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
M &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r^{n-2}.
\end{aligned}$$

Or, toutes ces suites étant des progressions géométriques, on trouve (185), $A = \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$; $B = \frac{r - r^{n-1}}{1 - r}$; $C = \frac{r^2 - r^{n-1}}{1 - r}$; $D = \frac{r^3 - r^{n-1}}{1 - r}$; $E = \frac{r^4 - r^{n-1}}{1 - r} \ldots$; $M = \frac{r^{n-2} - r^{n-1}}{1 - r}$.

Donc $A + B + C + D + E + \ldots\ldots + M = \frac{1}{1 - r} \times \left[(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots\ldots + r^{n-2}) - r^{n-1}(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.})\right]$; expression qui devient $\frac{1}{1-r} \times \left(\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}\right) - \frac{1}{1 - r} \times (n-1)r^{n-1}$, en observant que $1 + r + r^2 + r^3 + \text{etc.}$, forme une progression géométrique dont la somme $= \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$, et que la suite $1 + 1 + 1 +$ etc. $= n - 1$.

Ainsi la seconde partie de la suite $S = \frac{dar}{1-r} \times \left(\frac{1-r^{n-1}}{1-r} - (n-1)r^{n-1}\right)$. On aura donc finalement,

$$S = \frac{fa(1-r^n)}{1-r} + \frac{dar}{1-r}\left(\frac{1-r^{n-1}}{1-r} - (n-1)r^{n-1}\right).$$

433. *Corollaire*. Supposons que les deux progressions proposées soient poussées à l'infini, et que la progression géométrique soit décroissante, ou que r soit une fraction < 1; alors le terme r^n sera infiniment petit, et devra être négligé; le terme $(n-1)r^{n-1}$ sera aussi infiniment petit, comme on l'a déja vu en cas pareil. Ainsi, on aura simplement,

$$S = \frac{fa}{1-r} + \frac{dar}{(1-r)^2} = \frac{fa + (da - fa)r}{(1-r)^2}.$$

434. *Remarque*. Si, dans l'article 432, au lieu de multiplier on divisoit les termes de la progression arithmétique par ceux de la progression géométrique, on rappelleroit ce second problème au précédent, en faisant $\frac{1}{r} = q$.

435. Problème VII. *Sommer la suite :*

$$S = ar + 3ar^2 + 6ar^3 + 10ar^4 + \ldots + \frac{a(n^2+n)r^n}{2},$$

dont les termes sont les produits des nombres triangulaires par les termes d'une progression géométrique.

Je regarde cette suite comme composée des progressions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + 1ar^n,\\
B &= 0 + 2ar^2 + 2ar^3 + 2ar^4 + \ldots + 2ar^n,\\
C &= 0 + 0 + 3ar^3 + 3ar^4 + \ldots + 3ar^n,\\
D &= 0 + 0 + 0 + 4ar^4 + \ldots + 4ar^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
M &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots nar^n.
\end{aligned}$$

Or (185), $A = \frac{ar - ar^{n+1}}{1-r}$; $B = \frac{2ar^2 - 2ar^{n+1}}{1-r}$; $C = \frac{3ar^3 - 3ar^{n+1}}{1-r}$; $D = \frac{4ar^4 - 4ar^{n+1}}{1-r}$, etc. Donc A + B +

$C+D+\text{etc.}=\frac{ar}{1-r}(1+2r+3r^2+4r^3+\ldots+nr^{n-1})$
$-\frac{ar^{n+1}}{1-r}(1+2+3+4+\ldots\ldots n)$. Or, des deux suites qui entrent dans cette expression, la première $1+2r+3r^2+4r^3+\ldots\ldots+nr^{n-1}$, a pour somme $\frac{1}{1-r}\times\left(\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n\right)$, en vertu du problème précédent; et la seconde $1+2+3+4+\ldots\ldots+n=\frac{nn+n}{2}$. On aura donc enfin

$$S=\frac{ar}{1-r}.\left(\frac{1}{1-r}.\left(\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n\right)\right)-\frac{ar^{n+1}}{1-r}\times\frac{nn+n}{2}.$$

Lorsque la progression géométrique est décroissante à l'infini, on a simplement

$$S=\frac{ar}{(1-r)^3}.$$

Nos lecteurs appliqueront facilement les mêmes méthodes à la sommation d'autres suites de pareille nature.

CHAPITRE XXVI.

Des suites récurrentes.

436. Les suites récurrentes sont ainsi nommées en général, parce que, si l'on prend à volonté les premiers termes, les termes suivants se forment, semblablement, chacun par l'addition ou la soustraction d'un même nombre de termes précédents affectés de coëfficients donnés, et qu'il faut par conséquent, pour continuer la suite, *recourir* sans cesse aux termes déja trouvés.

Par exemple, la suite 5, 20, 80, 320, 1280, etc., est récurrente, parce qu'ayant pris à volonté le premier terme 5, le second est égal au premier multiplié par le nombre donné 4, le troisième est égal au second multiplié par le même nombre 4; ainsi de suite.

De même, la suite 1, 4, 23, 127, 704, 3901, etc., est récurrente, parce qu'ayant pris à volonté les deux premiers termes 1, 4, le troisième est égal à la somme faite du premier multiplié par le coëfficient donné 3, et du second multiplié par le coëfficient donné 5, c'est-à-dire, que $23 = 1 \times 3 + 4 \times 5$; le quatrième se forme semblablement du second et du troisième, c'est-à-dire, que $127 = 4 \times 3 + 23 \times 5$; de même, le cinquième $704 = 23 \times 3 + 127 \times 5$; ainsi de suite.

La suite 1, 3, 5, 20, 106, 566, etc., est aussi récurrente, parce qu'ayant pris à volonté les trois premiers termes 1, 3, 5, le quatrième est égal à la somme faite du premier multiplié par le coëfficient donné 2, du second multiplié par le coëfficient donné -4, et du troisième multiplié par le coëfficient donné 6, c'est-à-dire, que $20 = 1 \times 2 + 3 \times -4 + 5 \times 6$; le cinquième se forme de même du second, du troisième et du quatrième, c'est-à-dire, que $106 = 3 \times 2 + 5 \times -4 + 20 \times 6$; ainsi de suite.

On appelle *échelle de relation*, l'assemblage des coëfficients donnés qui servent à former la suite. Cette échelle peut avoir un nombre quelconque de termes. Dans la première suite proposée, l'échelle de relation est simplement 4; elle n'a qu'un seul terme : dans la seconde suite l'échelle de relation est $3 + 5$; elle a deux termes : dans la troisième suite l'échelle de relation est $2 - 4 + 6$; elle a trois termes, etc.

Le dernier terme de la suite se nomme *terme général*; il est une certaine fonction des premiers termes générateurs de la suite, de l'échelle de relation, et du nombre des termes. Cette fonction doit être telle qu'en nommant n le nombre des termes, et faisant successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, etc., le terme général devienne successivement chacun des termes de la suite.

437. Théorème I. *Toute progression géométrique peut être regardée comme une suite récurrente dont l'échelle de relation aura tant de termes qu'on voudra.*

Supposons que la suite a, b, c, d, e, f, représente

une progression géométrique dont chaque terme soit au terme suivant comme 1 est à m; il est clair,

1.° Que cette progression peut être regardée comme une suite récurrente dont l'échelle de relation est m.

2.° Puisque $b = ma$, $c = mb$, $d = mc$, etc., on aura $b - ma = 0$, ou, en multipliant tout par le nombre arbitraire k, $bk - mak = 0$. Donc $c = mb + bk - mak$, ou $c = (m + k) b - mka$. On trouvera de même $d = (m + k) c - mkb$, $e = (m + k) d - mkc$, etc. Donc la progression proposée peut être regardée comme une suite récurrente dont l'échelle de relation, composée de deux termes, est $(m + k) - mk$. Cette échelle est susceptible de plusieurs variations, puisque le nombre k a été pris arbitrairement.

3.° A cause de $c = (m + k) b - mak$ nous aurons, en multipliant tout par le nombre arbitraire h, et mettant tout d'un même côté, $ch - (mh + kh) b + makh = 0$. Et comme $d = (m + k) c - mbk$, nous aurons, en joignant au second membre de cette équation l'équation précédente, $d = (m + k + h) c - (mk + mh + hk) b + mkha$. On trouvera de même $e = (m + k + h) d - (mk + mh + kh) c + mkhb$; ainsi de suite. Donc la progression proposée peut être regardée comme une suite récurrente dont l'échelle de relation, composée de trois termes, est $(m + k + h) - (mk + mh + kh) + mkh$; ainsi de suite.

438. Théorème II. *Si on développe une fraction telle que* $\frac{M}{a + bx + cx^2}$, *dont le dénominateur est complexe, le numérateur étant tout ce qu'on voudra, en une suite infinie qui marche suivant les puissances de* x, *les coëfficients des termes de cette suite composeront une suite récurrente dont l'échelle de relation est* $-\frac{c}{a} - \frac{b}{a}$.

En effet, feignons qu'on ait $\frac{1}{a + bx + cx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ etc., et par conséquent,

$$o=\left\{\begin{array}{l}+aA+aBx+aCx^2+aDx^3+aEx^4+\text{etc.},\\ \quad +bAx+bBx^2+bCx^3+bDx^4+\text{etc.},\\ \qquad +cAx^2+cBx^3+cCx^4+\text{etc.},\\ \text{etc.}\\ -1.\end{array}\right.$$

Nous aurons d'abord, pour déterminer les deux premiers coëfficients A et B, les deux équations $aA-1=o$, $aB+bA=o$; ensuite, pour déterminer les autres coëfficients C, D, E, etc., nous aurons $aC+bB+cA=o$, ou $C=-\frac{Ac}{a}-\frac{Bb}{a}$; $aD+bC+cB=o$, ou $D=-\frac{Bc}{a}-\frac{Cb}{a}$; $aE+bD+cC=o$, ou $E=-\frac{Cc}{a}-\frac{Db}{a}$, etc. D'où l'on voit que C dérive de A et de B, comme D dérive de B et de C, comme E dérive de C et de D, etc. Ainsi les coëfficients A, B, C, D, E, etc., composent une suite récurrente dont l'échelle de relation est $-\frac{c}{a}-\frac{b}{a}$.

Il en est de même de toutes les fractions de pareille espèce.

439. Problème I. *Connoissant, dans une suite récurrente, l'échelle de relation et un certain nombre de termes, sommer la suite.*

1.° Lorsque l'échelle de relation n'a qu'un seul terme, la suite est une progression géométrique; elle peut par conséquent être sommée par le moyen de l'article 185.

2.° Soit a, b, c, d, e, f, g, une suite récurrente dont l'échelle de relation, composée de deux termes, soit $p+q$; nous aurons $c=ap+bq$, $d=bp+cq$, $e=cp+dq$, $f=dp+eq$, $g=ep+fq$. Donc $c+d+e+f+g=p(a+b+c+d+e)+q(b+c+d+e+f)$. Or, en nommant S la somme de tous les termes de la suite, on a $c+d+e+f+g=S-a-b$; $a+b+c+d+e=S-f-g$; $b+c+d+e+f=S-a-g$. On aura donc $S-a-b=p(S-f-g)+q(S-a-g)$. D'où l'on tire $S=\frac{pf+pg+qa+qg-a-b}{p+q-1}$.

Ainsi on aura la somme de la suite, en connoissant les deux premiers termes, les deux derniers et l'échelle de relation.

On trouveroit de même la somme, si l'échelle de relation avoit trois termes, et que l'on connût les trois premiers termes de la suite, les trois derniers et l'échelle de relation; ainsi de suite.

440. Problème II. *Sommer une suite récurrente dont l'échelle de relation a deux termes, en supposant que l'on connoisse cette échelle, les deux premiers termes de la suite et le nombre des termes.*

Soit, comme tout-à-l'heure, a, b, c, d, etc. une suite récurrente dont l'échelle de relation est $p+q$, et le nombre des termes n. Je suppose que chacun de ses termes soit la somme de deux termes correspondants des deux progressions géométriques suivantes :

$$\div\!\!\div\ A\lambda : A\lambda^2 : A\lambda^3 : A\lambda^4 \ldots\ldots\ldots\ldots A\lambda^n,$$
$$\div\!\!\div\ B\pi : B\pi^2 : B\pi^3 : B\pi^4 \ldots\ldots\ldots\ldots B\pi^n.$$

Cette supposition, qui nous donne $(A\lambda^n + B\pi^n)$ pour le dernier terme, ou pour le terme général de notre suite récurrente, sera permise et vraie, si nous trouvons pour les quatres inconnues A, B, λ, π, des valeurs telles qu'en faisant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, etc., le terme général $(A\lambda^n + B\pi^n)$ se change successivement en chacun des termes de la suite récurrente proposée. Or, 1.° en supposant $n=1$, l'expression du terme général devient $(A\lambda + B\pi)$; et en égalant cette quantité à a, on aura $A\lambda + B\pi = a$, première équation.

2.° En supposant $n=2$, l'expression du terme général devient $(A\lambda^2 + B\pi^2)$; et en égalant cette quantité à b, on aura $A\lambda^2 + B\pi^2 = b$, seconde équation.

3.° et 4.° On voit directement, ou par l'art. 437 n°. 2, qu'on peut faire $A\lambda^n = (\lambda+\pi)\,A\lambda^{n-1} - \lambda\pi A\lambda^{n-2}$, et $B\lambda^n = (\pi+\lambda)\,B\pi^{n-1} - \pi\lambda B\pi^{n-2}$; ainsi $A\lambda^n + B\pi^n = -\lambda\pi(A\lambda^{n-2} + B\pi^{n-2}) + (\lambda+\pi)(A\lambda^{n-1} + B\pi^{n-1})$. D'où il suit que le terme général $(A\lambda^n + B\pi^n)$ forme une suite récurrente dont l'échelle de relation est $-\lambda\pi + (\lambda+\pi)$. Nous aurons donc

les deux autres équations, $-\lambda\pi = p$, troisième équation; $\lambda + \pi = q$, quatrième équation.

Par conséquent on a tout ce qu'il faut pour déterminer les quatre inconnues A, B, λ, π.

La troisième et la quatrième équation combinées ensemble donnent, $\lambda = \frac{q + \sqrt{(4p + q^2)}}{2}$, $\pi = \frac{q - \sqrt{(4p + q^2)}}{2}$. Les deux premières équations combinées ensemble donnent d'abord, $A = \frac{b - a\pi}{\lambda^2 - \lambda\pi}$, $B = \frac{b - a\lambda}{\pi^2 - \lambda\pi}$. Substituant pour λ et π leurs valeurs, et représentant, pour abréger, la quantité radicale $\sqrt{(4p + q^2)}$ par M, on aura

$$A = \frac{2b - aq + aM}{M^2 + qM},\ B = \frac{2b - aq - aM}{M^2 - qM}.$$

Le terme général sera donc exprimé en grandeurs toutes connues. A l'aide de ce terme, on aura les expressions des derniers termes de la suite, et par conséquent on pourra représenter la somme S par le moyen des deux premiers termes de la suite, de l'échelle de relation, et du nombre des termes.

On voit que les quatre quantités A, B, λ, π, seront réelles, inégales, tant que la quantité radicale M sera réelle et au-dessus de zéro.

441. *Remarque I.* Si M est imaginaire, ce qui arrive lorsque p est négative, et qu'on a de plus $4p > q^2$; alors les valeurs de A, B, λ, π, sont imaginaires. En effet, supposons en ce cas $M = m\sqrt{-1}$, et pour abréger un peu, $2b - aq = l$; on aura $\lambda = \frac{q + m\sqrt{-1}}{2}$, $\pi = \frac{q - m\sqrt{-1}}{2}$,

$$A = \frac{l + am\sqrt{-1}}{-m^2 + qm\sqrt{-1}},\ B = \frac{l - am\sqrt{-1}}{-m^2 - qm\sqrt{-1}}.$$

Cependant l'expression $(A\lambda^n + B\pi^n)$ du terme général est encore réelle; car cette expression devient . . . .

$$\left[\left(\frac{l + am\sqrt{-1}}{-m^2 + qm\sqrt{-1}}\right) \times \left(\frac{q + m\sqrt{-1}}{2}\right)^n + \left(\frac{l - am\sqrt{-1}}{-m^2 - qm\sqrt{-1}}\right) \times \left(\frac{q - m\sqrt{-1}}{2}\right)^n\right],$$ ou bien (en réduisant les valeurs de

A et de B au même dénominateur), ...
$$\left[\frac{(l+am\sqrt{-1})(-m^2-qm\sqrt{-1})}{m^4+q^2m^2}\left(\frac{q+m\sqrt{-1}}{2}\right)^n+\frac{(l-am\sqrt{-1})(-m^2+qm\sqrt{-1})}{m^4+q^2m^2}\left(\frac{q-m\sqrt{-1}}{2}\right)^n\right].$$

Or, si l'on fait successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., et qu'après avoir formé les puissances de $\frac{q+m\sqrt{-1}}{2}$, et de $\frac{q-m\sqrt{-1}}{2}$, on effectue les multiplications indiquées, on trouvera que tous les termes qui contiennent des imaginaires se détruisent mutuellement par l'opposition des signes, et que par conséquent l'expression dont il s'agit est réelle. On peut donc encore, en ce cas, déterminer le terme général par les formules de l'article précédent.

442. *Remarque II.* Lorsque p est une quantité négative, et qu'on a de plus $4p=q^2$, les quatre *équations* $\lambda=\frac{q+\sqrt{(4p+q^2)}}{2}$, $\pi=\frac{q-\sqrt{(4p+q^2)}}{2}$, $A=\frac{b-a\pi}{\lambda^2-\lambda n}$, $B=\frac{b-a\lambda}{\pi^2-\lambda\pi}$, trouvées ci-dessus, deviennent $\lambda=\frac{q}{2}$, $\pi=\frac{q}{2}$, $A=\frac{b-a\pi}{0}=\infty$, $B=\frac{b-a\lambda}{0}=\infty$; en sorte que A et B paroissent être des quantités infinies de même signe; d'où il résulteroit pour le terme général $A\lambda^n+B\pi^n$ une valeur infinie; ce qui ne peut pas être, le terme général étant une quantité finie, du moins tant que n est un nombre fini. Mais si on emploie les deux équations $A=\frac{2b-aq+aM}{M^2+qM}$, $B=\frac{2b-aq-aM}{M^2+qM}$, en faisant $M=0$, on observera que dans chaque numérateur le terme aM étant infiniment petit par rapport aux autres, et dans chaque dénominateur le terme M^2 étant infiniment petit par rapport à l'autre, on aura $A=\frac{2b-aq}{0}$, $B=\frac{2b-aq}{-0}$ $=\frac{aq-2b}{0}$. D'où il suit que, si l'on substitue ces valeurs

de A et de B, et celles de λ et de π, dans le terme général, on trouvera pour ce terme la fraction indéterminée $\frac{0}{0}$; ce qui n'apprend rien. Le même résultat se trouveroit si on conservoit l'équation $A = \frac{b - a\pi}{\lambda^2 - \lambda\pi}$, et qu'au lieu de l'équation $B = \frac{b - a\lambda}{\pi^2 - \lambda\pi}$ on écrivît (ce qui revient au même), $B = \frac{a\lambda - b}{\lambda\pi - \pi^2}$; ou bien si l'on conservoit l'équation $B = \frac{b - a\lambda}{\pi^2 - \lambda\pi}$, et qu'au lieu de l'équation $A = \frac{b - a\pi}{\lambda^2 - \lambda\pi}$, on écrivît $A = \frac{a\pi - b}{\lambda\pi - \lambda^2}$. Le *calcul différentiel* fournit des méthodes pour déterminer en général les valeurs des fractions indéterminées de la même espèce que la précédente: ici nous concluons de nos calculs que, dans l'hypothèse proposée, le terme général ne doit pas avoir la forme $A\lambda^n + B\pi^n$. Celle qui lui convient alors est $A\lambda^n + nB\lambda^n$, expression qui est la somme des deux termes généraux de ces deux suites :

$$\div A\lambda : A\lambda^2 : A\lambda^3 : A\lambda^4 \ldots\ldots A\lambda^n.$$
$$B\lambda : 2B\lambda^2 : 3B\lambda^3 : 4B\lambda^4 \ldots\ldots nB\lambda^n.$$

Car d'abord, en faisant $n = 1$, puis $n = 2$, on aura les deux équations $A\lambda + B\lambda = a$, $A\lambda^2 + 2B\lambda^2 = b$. De plus, on aura $A\lambda^n + nB\lambda^n = -\lambda^2 (A\lambda^{n-2} + (n-2) B\lambda^{n-2}) + 2\lambda (A\lambda^{n-1} + (n-1) B\lambda^{n-1})$. Ainsi, si l'on fait successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, etc., le terme $(A + nB)\lambda^n$ formera une suite récurrente dont l'échelle de relation est $-\lambda^2 + 2\lambda$. On aura donc, en observant qu'ici, dans l'échelle de relation $p + q$, le terme p doit être précédé du signe $-$, ces deux autres équations $-\lambda^2 = -p$, $2\lambda = q$, lesquelles donnent l'une et l'autre, $\lambda = \frac{q}{2}$, à cause de $4p = q^2$. Mettant la valeur de λ dans les deux premières équations, on trouvera $A = \frac{4aq - 4b}{q^2}$, $B = \frac{4b - 2aq}{q^2}$. Le terme général sera donc exprimable en grandeurs réelles finies, et entièrement connues.

Ceux qui voudront approfondir davantage la théorie des suites récurrentes, pourront consulter ce que j'ai écrit sur ce sujet dans mon *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. On y verra la méthode que j'ai employée pour déduire d'une seule et même formule l'expression du terme général, quelle que soit la nature des racines de cette expression ; ce qui n'avoit encore été remarqué, du moins que je sache, par aucun analyste, et ce qui dispense de chercher, comme on a été obligé de le faire dans les calculs précédents, une formule particulière pour le cas des racines égales.

FIN DE L'ALGÈBRE.

TABLE.

COURS DE MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

ARITHMÉTIQUE.

SECONDE PARTIE.

ALGÈBRE.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

ARITHMETIQUE.

PAGE 13, *lig.* 18, dixièmes, *lisez* centièmes. *Page* 37, *lig.* 19, 3 fois, *lisez* 5 fois. *Page* 41, *lig.* 10, *au dénominateur de la fraction, lisez* 2789. *Page* 42, *lig.* 3, 7896, *lisez* 789. *Page* 51, *lig.* 27, déduire, *lisez* réduire. *Page* 61, *lig.* 33, décimateur, *lisez* dénominateur. *Page* 72, *lig.* 15, *au lieu du* 9, *qui est au dénominateur, mettez* 0. *Page* 73, *lig.* 20, $\frac{1}{7}$, *lisez* $\frac{1}{15}$. *Page* 78, *seconde lig. de l'addition, au lieu de* 242tt, *lisez* 542tt. *Page* 90, *lig.* 21, demi-mètre, *lisez* décimètre. *Page* 108, *lig.* 21, $\frac{1}{15}$, *lisez* $\frac{2}{15}$. *Page* 117, *lig.* 25, *au dénominateur, lisez* 3375. *Page* 141, *lig.* 25, *au numérateur, au lieu de* 5, *lisez* 25.

ALGEBRE.

Page 158, *lig.* 4, $+12a^2bd^2$, *lisez* $+12a^2bd$. *Page* 161, *lig.* 16, $-8ah\sqrt[4]{}$, *lisez* $-8a\sqrt[4]{h}$. *Page* 183, *lig.* 4, *au dénominateur, lisez* $\sqrt[m]{q}$. *Page* 188, *lig.* 6, *au dénominateur, au lieu de* $a\gamma$, *lisez* $a\gamma$. *Page* 189, *lig.* 2, divisant d, *lisez* divisant b. *Page* 190, *lig.* 1, $\frac{6}{a}$, *lisez* $\frac{6}{a}$. *Page* 203, *lig.* 11, $-2b^2$, *lisez* $-2b$. *Ibid, lig.* 25, $3abc-$, *lisez* $3abc+$. *Ibid, lig.* 31, $-2bc$, *lisez* $-2b$. *Page* 217, *lig.* 16, *au lieu du premier* x, *mettez* y. *Page* 239, *lig.* 3, n, *lisez* u. *Page* 313, *lig.* 12, $\frac{329}{9}$, *lisez* $\frac{529}{9}$. *Page* 314, *lig.* 19, *au dénominat. lisez* $(a-x)^2$. *Pag.* 321, *lig.* 26, *au second mot, lisez* $-2azx$. *Page* 322, *lig.* 26, *au dénominateur, lisez* $b+z^2$. *Page* 325, *lig.* 6, $-4hg$, *lisez* $-4kg$. *Page* 327, *lig.* 16, <11, *lisez* >11. *Page* 339, *lig.* 16, 45, *lisez* 45x. *Page* 340, *lig.* 5, q, *lisez* 62. *Page* 343, *lig.* 6, x, *lisez* x^2. *Ibid, lig.* 18, *au dénominat. lisez* $2(2z-p)$. *Page* 349, *lig.* 4, x^3-3x, *lisez* x^4-3x^2. *Page* 354, *lig.* 21, $\mp a$, *lisez* $\pm a$. *Page* 364, *lig.* 16, f, *lisez* f^2. *Page* 380, *lig.* 19, que l'on, *lisez*, que si l'on. *Page* 388, *lig.* 23, B^2, *lisez* B.

ERRATA.

ARITHMETIQUE.

PAGE 13, *lig.* 18, dixièmes, *lisez* centièmes. *Page* 37, *lig.* 19, 3 fois, *lisez* 5 fois. *Page* 41, *lig.* 10, *au dénominateur de la fraction, lisez* 2789. *Page* 42, *lig.* 3, 7896, *lisez* 789. *Page* 56, *lig.* 27, déduire, *lisez* réduire. *Page* 61, *lig.* 33, décimateur, *lisez* dénominateur. *Page* 72, *lig.* 15, *au lieu du* 9, *qui est au dénominateur, mettez* 0. *Page* 73, *lig.* 20, $\frac{1}{1}$, *lisez* $\frac{1}{15}$. *Page* 78, *seconde lig. de l'addition, au lieu de* 242tt, *lisez* 542tt. *Page* 96, *lig.* 21, demi-mètre, *lisez* décimètre. *Page* 108, *lig.* 21, $\frac{1}{13}$, *lisez* $\frac{1}{15}$. *Page* 117, *lig.* 25, *au dénominateur, lisez* 3375. *Page* 141, *lig.* 25, *au numérateur, au lieu de* 5, *lisez* 25.

ALGEBRE.

Page 158, *lig.* 4, $+12a^2bd^2$, *lisez* $+12a^2bd$. *Page* 161, *lig.* 16, $-8ah\sqrt[4]{}$, *lisez* $-8a\sqrt[4]{h}$. *Page* 183, *lig.* 4, *au dénominateur, lisez* $\sqrt[m]{q}$. *Page* 188, *lig.* 6, *au dénominateur, au lieu de* $a\gamma$, *lisez* $a\gamma$. *Page* 189, *lig.* 2, divisant d, *lisez* divisant b. *Page* 190, *lig.* 1, $\frac{c}{a}$, *lisez* $\frac{c}{\alpha}$. *Page* 203, *lig.* 11, $-2b^2$, *lisez* $-2b$. *Ibid, lig.* 25, $3abc-$, *lisez* $3abc+$. *Ibid, lig.* 31, $-2bc$, *lisez* $-2b$. *Page* 217, *lig.* 16, *au lieu du premier* x, *mettez* y. *Page* 239, *lig.* 3, n, *lisez* u. *Page* 313, *lig.* 12, $\frac{329}{9}$, *lisez* $\frac{529}{9}$. *Page* 314, *lig.* 19, *au dénominat. lisez* $(a-x)^2$. *Pag.* 321, *lig.* 26, *au second mot, lisez* $-2azx$. *Page* 322, *lig.* 26, *au dénominateur, lisez* $b+z^2$. *Page* 325, *lig.* 6, $-4hg$, *lisez* $-4kg$. *Page* 327, *lig.* 16, < 11, *lisez* > 11. *Page* 339, *lig.* 16, 45, *lisez* 45x. *Page* 340, *lig.* 5, q, *lisez* 62. *Page* 343, *lig.* 6, x, *lisez* x^2. *Ibid, lig.* 18, *au dénominat. lisez* $2(2z-p)$. *Page* 349, *lig.* 4, x^3-3x, *lisez* x^4-3x^2. *Page* 354, *lig.* 21, $\mp a$, *lisez* $\pm a$. *Page* 364, *lig.* 16, f, *lisez* f^2. *Page* 380, *lig.* 19, que l'on, *lisez*, que si l'on. *Page* 388, *lig.* 23, B^2, *lisez* B.

